# T.K.大数学 1964

第 1 問

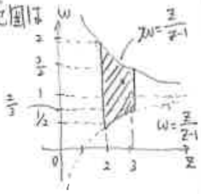
[解] $0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1,\ 2 \leq z \leq 3$ …①

(1) $w=3 \Leftrightarrow 3(z-y)=z-x \Leftrightarrow 2z=3y-x$ だが、①から $4 \leq 2z \leq 6,\ -1 \leq 3y-x \leq 3$ となるので $w=3$ となることはない ■

(2) $\max w = \frac{z}{z-1}$

(3) (2)で $z$ をうごかして、$w=1+\frac{1}{z-1}$ だから、$z=2$ で max $2$

(4) $z$ が一定の時 $\frac{z-1}{z} \leq w \leq \frac{z}{z-1}$ だから、$w$ の存在範囲は右図斜線部(境界含む)だから、もとめる max $k$ は $k=\frac{3}{2}$ である。



第 2 問

[解]

(1) まず. $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ …① を示す. 両辺正から. ① $\Leftrightarrow (a+b)^2 \geq 4ab \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0$

だから。①は成立し. 等号成立は $a=b$ の時。

さて. $(a.b)=(a+b, c+d)$ として代入すると

$$\frac{a+b+c+d}{2} \geq \sqrt{(a+b)(c+d)} \geq \sqrt{2\sqrt{abcd}+2\sqrt{abcd}} \quad (\because ①)$$

$$= 2\sqrt[4]{abcd}. \quad \therefore \frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd} \quad \text{□} \quad \cdots ②$$

② で $d=\frac{a+b+c}{3}$ として代入

$$\frac{a+b+c+\frac{a+b+c}{3}}{4} \geq \sqrt[4]{abc\frac{a+b+c}{2}} \quad \therefore \frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[4]{abc\frac{a+b+c}{3}}$$

両辺正から4乗してせり

$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \geq abc \quad \therefore \frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc} \quad \text{□}$$

(2) $P=\frac{3a+3b+3c+3d}{12} \geq \frac{\sqrt{ab}+\sqrt{ac}+\sqrt{ad}+\sqrt{bc}+\sqrt{bd}+\sqrt{cd}}{6} \ (\because ①) = R$

$$R=\frac{2\sqrt{ab}+2\sqrt{bc}+2\sqrt{ac}+2\sqrt{ad}+2\sqrt{bd}+2\sqrt{cd}}{12}$$

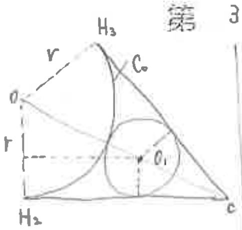
$$\geq \frac{\sqrt[3]{abc}+\sqrt[3]{abd}+\sqrt[3]{acd}+\sqrt[3]{bcd}}{3} \ (\because ③) = S$$

$$S \geq \sqrt[4]{abcd} \ (\because ②) = Q$$

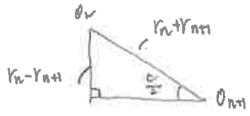
より

$P \geq R \geq S \geq Q$ //

# 第 3 問




[解] 内接円の中心Oから AB, BC, CA に下ろした垂足を $H_1, H_2, H_3$ とする。辺 AC, BC に接する円を、内接円から順に $C_0, C_1, C_2, \cdots$ とおく。$C_n$ の半径 $r_n$ とする。題意から $r_0 = r$ で、円 $C_n$ の中心 $O_n$ として、右図から




$$\sin\frac{C}{2} = \frac{r_n - r_{n+1}}{r_n + r_{n+1}}$$

$$\therefore\ r_{n+1} = \frac{1-\sin\frac{C}{2}}{1+\sin\frac{C}{2}} r_n$$

だから、くり返し用いて、

$$r_n = \left(\frac{1-\sin\frac{C}{2}}{1+\sin\frac{C}{2}}\right)^n \cdot r \quad \cdots ①$$

である。同様にして、他の2辺に接する円の半径 $s_n, t_n$ は、

$$s_n = \left(\frac{1-\sin\frac{A}{2}}{1+\sin\frac{A}{2}}\right)^n r, \quad t_n = \left(\frac{1-\sin\frac{B}{2}}{1+\sin\frac{B}{2}}\right)^n r \quad \cdots ②$$

とかけるから、全ての $C_n$ の面積和が（$C_0$ を除く）

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} \pi r_k^2 = \pi r_1^2 \frac{1}{1-\left(\frac{1-\sin\frac{C}{2}}{1+\sin\frac{C}{2}}\right)^2} = \pi r^2 \frac{\left(1-\sin\frac{C}{2}\right)^2}{4\sin\frac{C}{2}} \equiv F_C \quad \cdots ③$$

とかけることから、全ての面積和 T は対称性から、

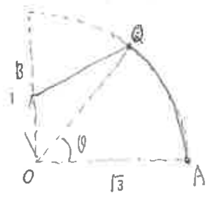
$$T = F_A + F_B + F_C + \pi r^2 = \pi r^2 \left\{1 + \frac{\left(1-\sin\frac{A}{2}\right)^2}{4\sin\frac{A}{2}} + \frac{\left(1-\sin\frac{B}{2}\right)^2}{4\sin\frac{B}{2}} + \frac{\left(1-\sin\frac{C}{2}\right)^2}{4\sin\frac{C}{2}}\right\} \quad /\!/$$

△ABC が一辺 $a$ の正三角形の時、$A=B=C=\pi/3$, $r=\frac{\sqrt{3}}{6}a$ だから代入して

$$T = \frac{11}{96}\pi a^2 \quad /\!/$$

第 4 問

[解] $\angle AOQ=\theta$ $(0\leq\theta\leq\pi/2)$ とおく。この時、かかる時間 $f(\theta)$ は




$$f(\theta)=\frac{\overset{\frown}{AQ}}{2}+\frac{\overline{BQ}}{1} \quad \cdots ①$$

である。

$$\overset{\frown}{AQ}=\sqrt{3}\theta \quad \cdots ②$$

で、$\triangle OBQ$ に余弦定理を用いて、

$$\overline{BQ}^2=1+3-2\sqrt{3}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$$
$$=4-2\sqrt{3}\sin\theta$$
$$\therefore \overline{BQ}=\sqrt{4-2\sqrt{3}\sin\theta} \quad \cdots ③$$

だから②③を①に代入して

$$f(\theta)=\frac{\sqrt{3}}{2}\theta+\sqrt{4-2\sqrt{3}\sin\theta}$$
$$f'(\theta)=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{-2\sqrt{3}\cos\theta}{2\sqrt{4-2\sqrt{3}\sin\theta}}$$

となり、

$$f'(\theta)\geq 0 \iff \sqrt{4-2\sqrt{3}\sin\theta}\geq 2\cos\theta$$

$0\leq\theta\leq\pi/2$ から両辺0以上だから2乗して、

$$4-2\sqrt{3}\sin\theta\geq 4\cos^2\theta=4-4\sin^2\theta$$
$$\therefore \frac{\sqrt{3}}{2}\leq\sin\theta\leq 1 \quad (\because 0\leq\sin\theta\leq 1)$$
$$\therefore \frac{\pi}{3}\leq\theta\leq 1$$

となるので、下表をうる。

| $\theta$ | $0$ | | $\pi/3$ | | $\pi/2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ | |

したがって もとめるQの位置は、$\angle QOA=\frac{\pi}{3}$ となる所 //

# 第 5 問

[解] $\begin{cases} \int_{-1}^{1} f(t)dt = 2\int_0^1 b\,dt = 2b = 1 \quad \therefore b = \frac{1}{2} \\ \int_{-1}^{1} xf(x)dx = 2\int_0^1 ax^2 dx = \frac{2}{3}a = 0 \quad \therefore a = 0 \end{cases}$

だから. $f(x) = \frac{1}{2}$ であるので,

$$G(t) = \frac{1}{2}(t+1). \quad A = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}x^2 dx = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$

から

$$H(t) = \frac{1}{1+3t^2}$$

で: $G(t)$, ネp, $H(t) > 0$ から. $F(t) = \dfrac{G(t)}{H(t)}$ とおくと

$$F(t) = \frac{1}{2}(t+1)(3t^2+1) = \frac{1}{2}(3t^3+3t^2+t+1)$$

$$2F'(t) = (3t+1)^2 \geq 0$$

から. $F(t)$ は単調増加で: $F(0) = \frac{1}{2}$ から. $-1 \leq t \leq 0$ では $F(t) \leq \frac{1}{2} < 1 \quad \therefore G(t) < H(t)$ //

となる.

第 6 問

[解]

(1) ・$\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{4} + \frac{a}{3} + \frac{b}{2} + c$ ---①

・$\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \sum_{k=1}^{n} \left\{ \frac{1}{n^3}k^3 + \frac{a}{n^2}k^2 + \frac{b}{n}k + c \right\}$

$= \frac{1}{n^3}\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2 + \frac{a}{n^2}\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + \frac{b}{n}\frac{1}{2}n(n+1) + cn$

$= \frac{(n+1)^2}{4n} + \frac{a}{6}\frac{(n+1)(2n+1)}{n} + \frac{b}{2}(n+1) + cn$

$= \frac{1}{4}\left(n+2+\frac{1}{n}\right) + \frac{a}{6}\left(2n+3+\frac{1}{n}\right) + \frac{b}{2}(n+1) + cn$

$= \left(\frac{1}{4}+\frac{a}{3}+\frac{b}{2}+c\right)n + \left(\frac{1}{2}+\frac{a}{2}\right) + \left(\frac{1}{4}+\frac{a}{6}\right)\frac{1}{n}$ ---②

①②から

$n\int_0^1 f(x)dx - \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = -\left(\frac{1}{2}+\frac{a}{2}+\frac{b}{2}\right) - \left(\frac{1}{4}+\frac{a}{6}\right)\frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} -\frac{a+b+1}{2}$ //

(2) ・$f(1+h) - f(1) = \{(1+h)^3-1\} + a\{(1+h)^2-1\} + b\{(1+h)-1\}$

$= (h^3+3h^2+3h) + a(h^2+2h) + bh$

・$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

から

$\frac{f(1+h)-f(1)}{h^2} - \frac{f'(1)}{h} = h + (3+a) + \frac{3+2a+b}{h} - \frac{3+2a+b}{h}$

$= h + (3+a) \xrightarrow{h\to 0} 3+a$ //