T.K.大数学 1963

$x^3-3kx-(y^3+z^3)=0$

第 1 問

[解] $\begin{cases} x^3-y^3-z^3=3xyz & \cdots ① \\ x^2=2(y+z) & \cdots ② \end{cases}$

②を①に代入して

$\{2(y+z)-3yz\}x=y^3+z^3 \quad \cdots ③$

$x, y, z \in \mathbb{N}$ から、$x>0$, $y^3+z^3>0$ だから、$2(y+z)-3yz>0$ が必要。対称性から $y \leqq z$ とすると

$3yz<2(y+z) \leqq 4z \quad \therefore\ 3y<4 \quad (\because z>0)$

$y \in \mathbb{N}$ とあわせて、$y=1$ となる。③に代入して

$(2-z)x=y^3+z^3$

同様に $2-z>0$ から $z=1$ となる。以上から $(y, z)=(1, 1)$ が必要で、この時 $x=2$ のみ①、②をみたす。以上から

$(x, y, z)=(2, 1, 1)$ //

第 2 問

[解] $\begin{cases} x>0,\ y>0,\ a>0 & \cdots ① \\ x+y \leqq 1+a & \cdots ② \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y} \leqq 4(1+a) & \cdots ③ \end{cases}$

② $\Leftrightarrow$ $y \leqq 1+a-x$ $\cdots$ ②$'$, ③ $\Leftrightarrow$ $\dfrac{1}{y} \leqq 4(1+a)-\dfrac{1}{x}$ $\therefore 0<\dfrac{1}{4(1+a)-\frac{1}{x}} \leqq y$ ($\because$ ①) $\cdots$ ③$'$

である。これらを①に代入し y の存在条件から

$$\begin{cases} 0<1+a-x & \cdots ④ \\ 0<\dfrac{1}{4(1+a)-\frac{1}{x}} \leqq 1+a-x & \cdots ⑤ \end{cases}$$

⑤から.

$$1 \leqq (1+a-x)\left\{4(1+a)-\frac{1}{x}\right\} = -4(1+a)x-\frac{1+a}{x}+\left\{1+4(1+a)^2\right\}$$

両辺に $x\ (>0)$ をかけて.

$$0 \leqq -4(1+a)x^2+4(1+a)^2x-(1+a)$$

$1+a>0$ から. 両辺 $(1+a)$ でわって

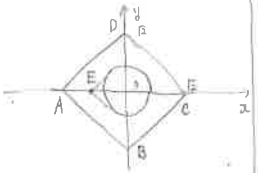
$$4x^2-4(1+a)x+1 \leqq 0$$

$$(2x-1)^2 \leqq 4ax < 4a(1+a) \quad (\because ④)$$

$$\therefore (2x-1)^2 < 4a(1+a) \quad \text{□}$$

第 3 問

[解] O(0,0) C($\sqrt{2}$,0) A($-\sqrt{2}$,0) B(0,$-\sqrt{2}$)となるよう xy 平面をおく。



この時. E($-\sqrt{2}r$, 0) となる。又円Oが□ABCDの内部だから.

$$0<r\leq 1 \quad \cdots ①$$

である。この時、相似から、

$$(\text{円O}):(\text{円E})=\sqrt{2}:\sqrt{2}(1-r)=1:1-r$$

となる。したがって円Eの半径は $r(1-r)$ であるから.

$$\text{円E}:(x+\sqrt{2}r)^2+y^2=r^2(1-r)^2 \quad \cdots ②$$

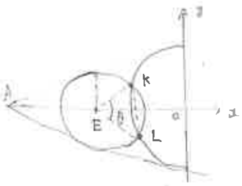
である。

(1) 2円が交わる条件は ②から、

$$-r<-\sqrt{2}r+r(1-r)$$

$$\Leftrightarrow 0<r<2-\sqrt{2} \qquad (\because ①)$$

(2) Kが第2象現にあるとして良い。すると、



K(X, Y) として.

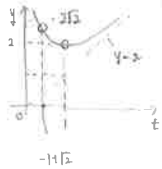
$$\begin{cases} X=\dfrac{\sqrt{2}}{4}r(r^2-2r-2) \\ Y=\sqrt{r^2-X^2} \end{cases}$$

である。したがって

$$\cos\frac{\theta}{2}=\frac{X+\sqrt{2}r}{r(1-r)}=\frac{\sqrt{2}r\left[\frac{r^2-2r-2}{4}+1\right]}{r(1-r)}=\frac{r^2-2r+2}{4(1-r)}\cdot\sqrt{2}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{4}\left\{(1-r)+\frac{1}{1-r}\right\} \quad \cdots ③$$

である。$t=1-r$ に対し, $f(t)=t+\frac{1}{t}$ とすると、(1)のとき $-1+\sqrt{2}<t<1$ で $y=f(t)$ のグラフは右図だから (1)のとき. $2<f(t)<2\sqrt{2}$ である。③に代入して



$$\frac{\sqrt{2}}{2}<\cos\frac{\theta}{2}<1 \quad \cdots ④$$

$0\leq\theta\leq\pi$ 及び $\cos\frac{\theta}{2}$ が同区間で単調減少なことから,

$$0<\frac{\theta}{2}<\frac{\pi}{4}$$

$$\therefore 0<\theta<\pi/2$$

である。

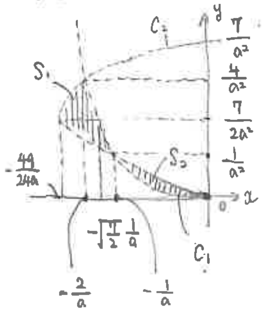
第 4 問

第 5 問

[解] $a>0$ …①

$$\begin{cases} C_1 : y = x^2 \\ C_2 : x = \frac{1}{6}a^3y^2 - \frac{7}{6}ay \equiv f(y) \end{cases}$$

とおく。$f(y) = \frac{1}{6}a^3\left(y - \frac{7}{2a^2}\right)^2 - \frac{49}{24a}$ だから、グラフの概形は右図



交点のx座標について、yを消去して

$$6x = a^3 x^4 - 7a x^2$$

$$x(a^3x^3 - 7ax - 6) = 0$$

$$x(ax+1)((ax)^2 - (ax) - 6) = 0$$

$$x(ax+1)(ax-3)(ax+2) = 0$$

$$\therefore x = 0, -\frac{1}{a}, -\frac{2}{a}, \frac{3}{a}$$

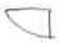
となる。したがって、右上図のように面積S_1, S_2をおくと、まず、

$S_2 =$  $-$  $-$  …②

となる。対称性に注意して

 $= \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{a^2} = \frac{1}{a^3}$

 $= \int_0^{\frac{1}{a}} x^2 dx = \frac{1}{3}\frac{1}{a^3}$

 $= -\int_0^{\frac{1}{a^2}} f(y)dy = -\left[\frac{a^3}{18}y^3 - \frac{7}{12}ay^2\right]_0^{1/a^2} = \frac{19}{36}\frac{1}{a^3}$

だから、②に代入して

$$S_2 = \left(1 - \frac{1}{3} - \frac{19}{36}\right)/a^3 = \frac{5}{36}\frac{1}{a^3}$$ …③

一方、S_1について、

$S_1 =$  $-$  …④

である。

 $= -\int_{1/a^2}^{4/a^2} f(y)dy = -\left[\frac{a^3}{18}y^3 - \frac{7}{12}ay^2\right]_{1/a^2}^{4/a^2} = \frac{21}{4a^3}$

 $=$  $-$  $= \left(\frac{8}{a^3} - \frac{1}{a^3}\right) - \int_{\frac{1}{a}}^{\frac{2}{a}} x^2 dx = \frac{14}{3a^3}$

を④に代入して

$$S_1 = \left(\frac{21}{4} - \frac{14}{3}\right)/a^3 = \frac{7}{12}\frac{1}{a^3}$$ …⑤

③⑤から

$$S_1 : S_2 = \frac{7}{12} : \frac{5}{36} = 21 : 5$$

第 6 問

[解] $g(x)=\alpha x+\beta$ $(\alpha \neq 0,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R})$ とかける。与式から.

$$\alpha \int_0^a f(x)\,x\,dx + \beta \int_0^a f(x)\,dx = 0 \quad \cdots ①$$

が $\alpha \neq 0$ をみたす任意の (α, β) で成立するので: ①が α, β についての恒等式となり.

$$\int_0^a f(x)\,dx = 0 \quad \cdots ②$$

$$\int_0^a f(x)\cdot x\,dx = 0 \quad \cdots ③$$

である。$f(x)=0$ が実解を持たない時. $f(x)$ の符号は一定となり. $a \neq 0$ とあわせて②はみたされず不適だから. $f(x)=(x-t)(x-s)$ $(t, s \in \mathbb{R})$ と書ける。$t=s$ の時は $g(x)=x$ とすれば. $f(x)\cdot g(x) \geqq 0$ (等号は常には成立しない) となり. 与式をみたさない。よって $t \neq s$ である。以下.「t, s の少なくとも一方が $x \leqq 0$, $a \leqq x$ にある」と仮定する。この時. これが t だとして良い (∵対称性) この時. $g(x)=x-s$ とすると

$$f(x)\cdot g(x) = (x-t)(x-s)^2 \ :$$

の符号は $[0, a]$ で一定であり. 与式をみたさず不適。よって $0 < t, s < a$, $t \neq s$ となり題意は示された ■