T.K.大数学 1962

60分

第 1 問

[解] $n=0,1,\cdots,m-1$，$1\leq m$ に対し，$f(m,n)=5m+n$ と表されるセイスウをもとめる。まず，25以上のセイスウは全て $f(m,n)$ の形で示されることを示す。$m\geq5$ とする。m を固定すると，$f(m,n)$ は $\underbrace{5m,5m+1,\cdots,6m-1}$ の全ての自然数をとる。

$$\left.\begin{aligned} f(m,m-1) &= 6m-1 \\ f(m+1,0) &= 5m+5 \end{aligned}\right\}$$

において，$f(m,m-1)\geq f(m+1,0)-1 \Leftrightarrow m\geq5$ だから，$m\geq5$ ならば〜〜を順に書き下していけば25以上のセイスウを全て表す。よって示された。

したがって，24以下の自然数をしらべれば良い。$m\geq5$ とすると $f(m,n)\geq25$ だから，$m\leq4$ として書き下せば十分。

$$\begin{cases} m=1, & \cdots 5 \\ m=2 & \cdots 10,11 \\ m=3 & \cdots 15,16,17 \\ m=4 & \cdots 20,21,22,23 \end{cases}$$

だから，これに含まれない24以下の自然数を列挙して，

$1,2,3,4,6,7,8,9,12,13,14,18,19,24$ //

第 2 問

[解] 長針, 短針の長さを R, r とする.

題意及び余弦定理から,

$$\begin{cases} 4^2 = R^2+r^2-2Rr\cos\frac{\pi}{3} = R^2+r^2-Rr & \cdots ① \\ 6^2 = R^2+r^2-2Rr\cos\frac{7}{12}\pi \end{cases}$$

又, もとめる長さ $l\ (>0)$ として

$$l^2 = R^2+r^2-2Rr\cos\frac{2}{3}\pi$$
$$= R^2+r^2+Rr \quad \cdots ②$$

ここで, $\cos\frac{7}{12}\pi < 0$ から,

$$\cos\frac{7}{12}\pi = -\sqrt{\frac{1+\cos\frac{7}{6}\pi}{2}} = -\sqrt{\frac{1-\frac{1}{2}\sqrt{3}}{2}} = -\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

だから, ①より,

$$36 = R^2+r^2+2Rr\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$
$$= R^2+r^2+\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}Rr \quad \cdots ③$$

①.③を辺々引いて,

$$20 = \left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}+1\right)Rr$$

$$\therefore Rr = \frac{40}{\sqrt{6}-\sqrt{2}+2} \quad \cdots ④$$

②に代入して

$$l^2 = (16+Rr)+Rr \quad (\because ①)$$
$$= 16+2Rr$$
$$= 16+\frac{80}{\sqrt{6}-\sqrt{2}+2} \quad (\because ④)$$
$$= 16+20(\sqrt{3}+1-\sqrt{2})$$
$$= 20(\sqrt{3}-\sqrt{2})+36 \quad \cdots ⑤$$

ここで $(6.5)^2 < l^2 < (6.6)^2$ を示す。

$(1.73)^2 < 3 < (1.733)^2 \quad \therefore 1.73 < \sqrt{3} < 1.733$

$(1.41)^2 < 2 < (1.42)^2 \quad \therefore 1.41 < \sqrt{2} < 1.42$

だから, ⑤に代入して

$$20(1.733-1.42)+36 < l^2 < 20(1.74-1.41)+36$$

$$\therefore 42.26 < l^2 < 42.6 \quad \cdots ⑥$$

一方, $(6.5)^2 = 42.25$, $(6.6)^2 = 43.56$ だから, ⑥より,

$$(6.5)^2 < l^2 < (6.6)^2$$

よって示された。$l>0$ より,

$$6.5 < l < 6.6$$

つまり,

$$l \fallingdotseq 6.5$$

である。

第 3 問

[解] $C: (x-2a)^2+(y-a)^2=5a^2-20a+25$ とおく。

(与式)$\Leftrightarrow$ $(-4x-2y+20)a+(x^2+y^2-25)=0$ だから、これが a についての恒等式の時、つまり

$$\begin{cases} -4x-2y+20=0 \\ x^2+y^2=25 \end{cases} \Leftrightarrow (x,y)=(3,4),(5,0)$$

の時、与式は a によらず成り立つから、もとめる2点はこれである。又、2円の中心間距離 d は $d=\sqrt{(2a)^2+a^2}=\sqrt{5}|a|$ である。

1° 外接する時

$$\sqrt{5}+\sqrt{5}\sqrt{a^2-4a+5}=\sqrt{5}|a|$$

$$\sqrt{a^2-4a+5}=|a|-1$$

$|a|\geq 1$ のもとで2乗して整理すると $a=2$ をえる。

2° 内接する時

$$\left|\sqrt{5}-\sqrt{a^2-4a+5}\cdot\sqrt{5}\right|=\sqrt{5}|a|$$

両辺0以上から2乗して

$$a^2-4a+5+1-2\sqrt{a^2-4a+5}=a^2$$

$$\sqrt{a^2-4a+5}=3-2a$$

$a\leq\frac{3}{2}$ のもとで2乗して

$$a^2-4a+5=4a^2-12a+9$$

$$3a^2-8a+4=0$$

$$(3a-2)(a-2)=0 \quad \therefore\ a=\frac{2}{3},2$$

$a\leq\frac{3}{2}$ をみたすのは $a=\frac{2}{3}$

以上から $a=\frac{2}{3},2$

第 4 問

[解] 与式を$f(x, y)$とおく。$S=\sin x$, $C=\cos x$とおく。

$$f(x,y) = 2S + \underbrace{\begin{pmatrix}1\\ \sqrt{3}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\cos y\\ \sin y\end{pmatrix}}_{②}\cdot C \qquad \cdots ①$$

コーシー・シュワルツから

$$-2 \leq ② \leq 2 \quad \left(左側は y=\frac{4}{3}\pi, 右は y=\frac{\pi}{3}\right) \qquad \cdots ③$$

である。又、以下のように場合分けする。

ア: $0 \leq x \leq \pi/2$　イ: $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$, ウ: $\pi \leq x \leq \frac{3}{2}\pi$, エ: $\frac{3}{2}\pi \leq x < 2\pi$

下表をうる。

	ア	イ
$\max f(x,y)$	$2(C+S) \leq 2\sqrt{2}$ ($x=\pi/4$で等号)	$2(S-C) \leq 2\sqrt{2}$ ($x=\frac{3}{4}\pi$ 〃)
$\min f(x,y)$	$2(S-C) \geq -2$ ($x=0$ 〃)	$2(S+C) \geq -2$ ($x=\pi$)

	ウ	エ
$\max f$	$2(S-C) \leq 2$ ($x=\pi$)	$2(S+C) < 2$ ($x \to \pi$)
$\min f$	$2(C+S) \geq -2\sqrt{2}$ ($x=\frac{5}{4}\pi$)	$2(S-C) \geq -2\sqrt{2}$ ($x=\frac{7}{4}\pi$)

よって

$$\begin{cases} \max = 2\sqrt{2} \left((x,y) = \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right), \left(\frac{3}{4}\pi, \frac{4}{3}\pi\right)\right) \\ \min = -2\sqrt{2} \left((x,y) = \left(\frac{5}{4}\pi, \frac{\pi}{3}\right), \left(\frac{7}{4}\pi, \frac{4}{3}\pi\right)\right) \end{cases}$$

第 5 問

[解] 漸化式から

$$f_1(x) = \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} \cos x\,dx = \frac{1}{2h}\left[\sin(x+h) - \sin(x-h)\right]$$

$$= \frac{1}{2h}\cdot 2\sin h\cdot\cos x = \frac{\sin h}{h}\cos x = \frac{\sin h}{h} f_0(x)$$

だから、これをくり返し用いて、$p = \frac{\sin h}{h}$ として

$$f_n(x) = p^n \cos x$$

だから

$$\sum_{k=1}^{n} f_k(x) = p\cos x\,\frac{1-p^n}{1-p} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{p}{1-p}\cos x \quad (\because |p|<1)$$

$$= \frac{\sin h}{h-\sin h}\cos x$$ //

第 6 問

[解] 平均値の定理から，$h(x)=\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ に対し，$h(x)=f'(c)$ なる c が $a<c<x$ にある。…①　又，$f''(x)>0$ から $f'(x)$ は単調増加。② $a<x<b$ のとき，

$$h'(x)>0 \iff f'(x)(x-a)-\{f(x)-f(a)\}>0$$

$$\iff f'(x)>\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(c) \quad \cdots ③$$

たが，②及び $c<x$ から③は明らか。よって $h'(x)>0$ つまり与式は単調増加。■