T. K. 大数学 1961

第 1 問

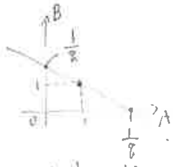
[解] $0<p,\ 0<q.$ ……①

方程式 $Ap+Bq=1$ をかんがえる.題意から

$$(A,B)=(1,1)\ (\cos au,\cos bu).\ (\cos av,\cos bv)$$

が解である。よってグラフの概形は右図。$-1\leq\cos x\leq 1$

だから、$(\cos au,\cos bu),(\cos av,\cos bv)=(1,1)$ のみが適する。



$\left(1<\frac{1}{p},\ 1<\frac{1}{q}\right)$

したがって.

$$\begin{cases}\cos au=\cos av=1\\ \cos bu=\cos bv=1\end{cases}$$

だから.整数 $k_1\sim k_4$ を用いて.

$$\begin{cases}au=2k_1\pi\ ,\ bu=2k_2\pi\\ av=2k_3\pi,\ \ bv=2k_4\pi\end{cases}$$

とかける. $a\neq 0$ の時. $u=\frac{2k_1\pi}{a}$, $v=\frac{2k_3\pi}{a}$ から $\frac{v}{u}=\frac{k_3}{k_1}\in\mathbb{Q}$ となり矛盾するから. $a=0$.

同様に $b=0$ だから.題意は示された ∎

第 2 問

[解] $f(0)=1,\ f(\frac{\pi}{2})=1$ から、

$$\begin{cases} 1=a+b \\ 1=a+c \end{cases} \quad \therefore\ b=c=1-a \quad \cdots ①$$

である。したがって、

$$f(x)=a+(1-a)(\cos x+\sin x)$$
$$f'(x)=(1-a)(\cos x-\sin x)$$
$$=\sqrt{2}(1-a)\cos(x+\pi/4) \quad \cdots ②$$

だから、aによって下表をえる。

1° $1-a<0$ $\therefore$ $1<a$の時

x	0		$\pi/4$		$\pi/2$
f'		$-$	0	$+$	
f	1	↘		↗	1

したがって、$|f(x)|\leq 2$となる条件は

$f(\pi/4)\geq -2 \iff a\leq\sqrt{2}$

2° $1-a=0$ $\therefore$ $a=1$の時

$f(x)\equiv 1$ から、条件をみたす。

3° $1-a>0$ $\therefore$ $a<1$の時

x	0		$\pi/4$		$\pi/2$
f'		$+$	0	$-$	
f	1	↗		↘	1

条件は $f(\pi/4)\leq 2 \iff -\sqrt{2}\leq a$

以上から、$-\sqrt{2}\leq a\leq\sqrt{2}$ //

第 3 問

[解] $c=\cos\theta$, $s=\sin\theta$ とおく $(0 \leq \theta < 2\pi)$ 題意から $(x, y)=(c, s)$ とおける.

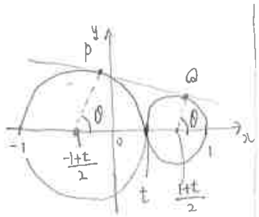
$f(\theta)=x^2-y^2+2\sqrt{3}xy$ とすると

$$f(\theta)=\cos 2\theta+\sqrt{3}\sin 2\theta = 2\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{6}\right)$$

だから $\left\{\begin{array}{l} f(\theta) \text{が最大の時、} \theta=\frac{\pi}{6}, \frac{7}{6}\pi \text{ で: } (x, y)=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right) \\ f(\theta) \text{が最小の時 } \theta=\frac{2}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi \text{ で: } (x, y)=\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \end{array}\right.$ //

第 4 問

[解] $A(1,0)$ $B(-1,0)$, $C(t,0)$ $(0 \leq t \leq 1)$ とおく。
対称性から P, Q の y 座標が正である時のみをかんがえる。この時、題意の2円は



$$\begin{cases} \left(x-\frac{1+t}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{1-t}{2}\right)^2 \\ \left(x-\frac{-1+t}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{1+t}{2}\right)^2 \end{cases} \quad \cdots ①$$

図のように角度 θ をおくと、接線は、$c=\cos\theta$, $s=\sin\theta$ とおくと

$$\begin{cases} c\left(x-\frac{1+t}{2}\right)+sy=\frac{1-t}{2} \\ c\left(x-\frac{-1+t}{2}\right)+sy=\frac{1+t}{2} \end{cases}$$

これらが等しい時

$$c\,\frac{1+t}{2}+\frac{1-t}{2}=c\,\frac{-1+t}{2}+\frac{1+t}{2}$$

$$\therefore\ c=t$$

だから $s=\sqrt{1-t^2}$ で

$$P\left(\frac{1+t}{2}\cdot t+\frac{-1+t}{2},\ \frac{1+t}{2}\sqrt{1-t^2}\right)$$

$$Q\left(\frac{1-t}{2}\cdot t+\frac{1+t}{2},\ \frac{1-t}{2}\sqrt{1-t^2}\right)$$

だから、PQ の中点、$M(X,Y)$ とすると

$$\begin{cases} X=\frac{1}{2}\left\{\frac{t^2+2t-1}{2}+\frac{-t^2+2t+1}{2}\right\}=t \\ Y=\frac{1}{2}\left\{\frac{1+t}{2}+\frac{1-t}{2}\right\}\sqrt{1-t^2}=\frac{1}{2}\sqrt{1-t^2}=\frac{1}{2}\sqrt{1-X^2} \end{cases}$$

したがって、対称性から、$X^2+4Y^2=1$ が求めるキセキである。

[解] $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ とおく。$F(x)=\frac{1}{4}x^4+\frac{p}{3}x^3+\frac{q}{2}x^2+rx$ である。

(与式) $\iff 2F(x)\le F(x+y)+F(x-y)$

だから代入して

$$\frac{1}{4}\left[(x+y)^4+(x-y)^4-2x^4\right]+\frac{p}{3}\left[(x+y)^3+(x-y)^3-2x^3\right]+\frac{q}{2}\left[(x+y)^2+(x-y)^2-2x^2\right]$$
$$+r\left[(x+y)+(x-y)-2x\right]\ge 0$$

$$\frac{1}{4}\left[12x^2y^2+2y^4\right]+\frac{p}{3}\left[6xy^2\right]+\frac{q}{2}(2y^2)\ge 0$$

$$3x^2+\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{3}px+q\ge 0 \quad (\because y^2\ge 0)$$

だから、$3x^2+\frac{p}{3}x+q=0$ の判別式 D として、条件式は

$$D\le 0 \iff \left(\frac{p}{3}\right)^2-12q\le 0 \iff p^2\le 108q$$

[解] $-\frac{1}{2} < f'(x) < \frac{1}{2}$ …① の両辺積分して、$-\frac{1}{2}x + C_1 < f(x) < \frac{1}{2}x + C_2$ である. …②

(1) $F(x) = f(x) - x$ とおく。$F'(x) = f'(x) - 1 < 0$ から. $F(x)$ は単調減少で. ②から.

$$-\frac{3}{2}x + C_1 < F(x) < -\frac{1}{2}x + C_2$$

だから、はさみうちから. $x \to \infty$ で $F(x) \to -\infty$, $x \to -\infty$ で $F(x) \to +\infty$ であり.
$F(x)$ は連続だから. 以上から $F(x) = 0$ は唯1つの実解を持つ。□

(2) $f(\alpha) = \alpha$ から.

$$a_{n+1} - \alpha = f(a_n) - f(\alpha) \quad \cdots ③$$

$a_n = \alpha$ なる n がある時. ③から. $n \leq m$ をみたす m に対して $a_m = \alpha$ だから. $a_n \to \alpha$ $(n \to \infty)$ である。

その他の時. 平均値の定理から、$f(a_n) - f(\alpha) = f'(c)(a_n - \alpha)$ をみたす c がある. ③から

$$|a_{n+1} - \alpha| = |f'(c)|\,|a_n - \alpha| < \frac{1}{2}|a_n - \alpha| \quad (\because ①)$$

くり返し用いて.

$$|a_n - \alpha| < \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} |a_1 - \alpha| \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

はさみうちから.

$$a_n \longrightarrow \alpha \quad (n \to \infty)$$