a，b，c は定数であって，函数 $f(x) = a\sin x + b\cos x + c\cos 2x$ は $x = \dfrac{\pi}{4}$ において極大値 $6\sqrt{2}$ をとり，また $\int_0^{2\pi} f(x)\cos x dx = 5\pi$ である．このとき

(1) a，b，c を求める．

(2) $0 \leq x \leq 2\pi$ の範囲で $f(x)$ を最小にする x の値とその時の $f(x)$ の値とを求めよ．

[解] $\cos x = t$,$\sin x = s$ とおく．

$$f'(x) = at - bs + 2c\cos 2x$$

である．まず，極大値の条件から $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 0$ が必要である．これと題意の条件から

$$\begin{cases} f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 0 \\ f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 6\sqrt{2} \\ \displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\cos x dx = 5\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\sqrt{2}}{2}(a-b) = 0 \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}(a+b) + c = 6\sqrt{2} \\ b\pi = 5\pi \end{cases}$$

故に $(a, b, c) = (5, 5, \sqrt{2})$ となる．$f'(x)$ に値を代入する．

$$\begin{aligned} f'(x) &= 5t - 5s + 2\sqrt{2}(t^2 - s^2) \\ &= (t - s)\left(5 + 4\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right) \end{aligned}$$

したがって，下表を得る．

x	0		$\pi/4$		$5\pi/4$		2π
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	5	$\nearrow$		$\searrow$	$-4\sqrt{2}$	$\nearrow$	

故に $x = \dfrac{\pi}{4}$ で極大となり十分である．以上から

(1) $(a, b, c) = (5, 5, \sqrt{2})$

(2) $\min f(x) = f\left(\dfrac{5\pi}{4}\right) = -4\sqrt{2}$

となる．$\cdots$(答)