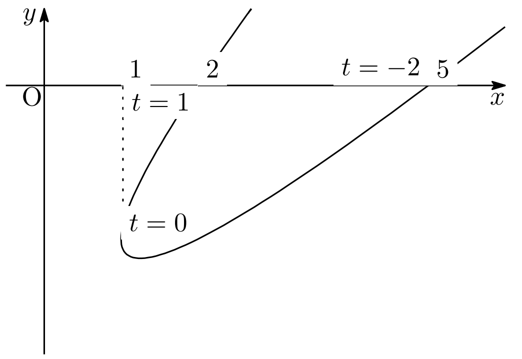
t がすべての実数の範囲を動く時 $x = t^2 + 1$，$y = t^2 + t - 2$ を座標とする点 (x, y) は一つの曲線を描く．この曲線と x 軸とによって囲まれる部分の面積を求めよ．

[解] $x' = 2t$，$y' = 2t + 1$ であるから，下表を得る．

t		$-1/2$		0	
x'	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y'	$-$	0	$+$	$+$	$+$
(x, y)	$\searrow$	$(5/4, -9/4)$	$\searrow$	$(1, -2)$	$\nearrow$

また，極限値は，$t \to \pm\infty$ の時，$x, y \to \infty$ である．ゆえにグラフの概形は下図.



ここでグラフの下側を y_-，上側を y_+ とすると，求める面積 S は，

$$
\begin{aligned}
S &= \int_1^2 (y_+ - y_-)dx - \int_2^5 y_- dx \\
&= \int_0^1 y_+ \frac{dx}{dt}dt - \int_0^{-1} y_- \frac{dx}{dt}dt - \int_{-1}^{-2} y_- \frac{dx}{dt}dt \\
&= \int_{-2}^1 y\frac{dx}{dt}dt \\
&= \int_{-2}^1 (t^2 + t - 2)2tdt \\
&= 2\left[\frac{1}{4}t^4 + \frac{1}{3}t^3 - t^2\right]_{-2}^1 = \frac{9}{2}
\end{aligned}
$$

である．$\cdots$(答)

[別解]$xy' - x'y = -t^2 + 6t + 1$ より，ガウスグリーンの定理から，

$$T = \frac{1}{2}\int_{-2}^1 -(-t^2 + 6t + 1)dt = \frac{9}{2}$$

である．$\cdots$(答)