

$\triangle ABC$  の 3 辺  $BC, CA, AB$  の上にそれぞれ点  $L, M, N$  をとり

$$\frac{BL}{LC} = \frac{CM}{MA} = \frac{AN}{NB} = \frac{1}{2}$$

となるようにする.  $AL$  と  $CN$  の交点を  $P$ ,  $AL$  と  $BM$  の交点を  $Q$ ,  $BM$  と  $CN$  の交点を  $R$  とするとき,  $\triangle PQR$  の面積と  $\triangle ABC$  の面積との比を求めよ.

[解]  $\triangle ABL$  と  $CN$  にメラネウスを用いて

$$\begin{aligned} \frac{NB}{AN} \frac{CL}{BC} \frac{BA}{LP} &= 1 \\ \frac{PA}{LP} &= \frac{3}{4} \end{aligned} \quad (1)$$

対称性から (詳しくはメラネウスを各三角形に用いることで)

$$\begin{aligned} LQ : QP : PA &= NP : PR : RC \\ &= MR : RQ : QB = a : b : c \end{aligned} \quad (2)$$

とおけることに注意して,  $\triangle CPL$  と  $BR$  にメラネウスを用いて

$$\begin{aligned} \frac{RP}{CR} \frac{QL}{PQ} \frac{BC}{LB} &= 1 \\ \frac{a}{c} &= \frac{1}{3} \end{aligned} \quad (3)$$

一方 (1), (2) から,

$$a + b : c = 4 : 3 \quad (4)$$

(3), (4) から

$$a : b : c = 1 : 3 : 3$$

であるから,

$$\triangle PQR = \frac{2}{3} \frac{3}{7} \frac{1}{2} \triangle ABC = \frac{1}{7} \triangle ABC$$

である y. . . (答)