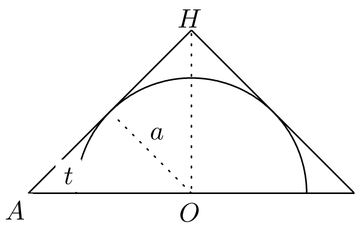
あたえられた半径 a の半球に外接する直円錐をつくり，その全表面積 (側面積と底面積の和) をもっとも小さくするには，その高さをなにほどにすればよいか．ただし直円錐の底面は半球の底面とおなじ平面上にあるものとする．

[解] 直円錐の軸を含む平面で切って，下図のように点，図形量を置く．また，$\cos t = c$, $\sin t = s$ とおく．ただし $0 < t < \pi/2$ である．



上図から，

$$|AO| = \frac{a}{c} \qquad |AH| = \frac{a}{cs}$$
$$|OH| = \frac{a}{c}$$

であるから，直円錐の表面積 T は，

$$\begin{aligned} T &= \text{底面積} + \text{側面積} \\ &= \pi|AO|^2 + \pi|AO||AH| \\ &= a^2\pi\left(\frac{1}{s^2} + \frac{1}{cs^2}\right) \\ &= a^2\pi\frac{1}{c(1-c)} \geq 4a^2\pi \end{aligned}$$

等号成立は $c = 1/2$ の時，つまり $t = \pi/3$ の時である．この時，

$$|OH| = 2a$$

となる．$\cdots$(答)