点 O で 60° の角をなす半直線 OX，OY と $\angle XOY$ の 2 等分線 Z があり，OX，OY 上に O から $1\,\mathrm{cm}$ の距離にそれぞれ点 A，B がある．いま動点 P，Q，R がそれぞれ AOB から同時に出発して半直線 OX，OZ，OY 上をそれぞれ毎秒 $1\,\mathrm{cm}$，$\sqrt{3}\,\mathrm{cm}$，$2\,\mathrm{cm}$ の速さで O から遠ざかる．

(i) 3 点 P，Q，R が一直線上に来るまでの時間
および

(ii) $\triangle PQR$ の面積が $\triangle AOB$ の面積に等しくなるまでの時間

を求めよ．

[解] まず，O を原点とし，半直線 OX が x 軸正方向になるように xy 座標を定める．このとき OY が第 1 象限にあるようにする．さらに動点が時刻 0 に各点を出発したとする．すると時刻 t での動点の位置は以下のように表せる．

$$
\begin{aligned}
&P(t+1,0)\\
&Q(\frac{3}{2}t,\frac{\sqrt{3}}{2}t)\\
&R(t+\frac{1}{2},\sqrt{3}t+\frac{\sqrt{3}}{2})
\end{aligned}
$$

これを用いて問に答える．

(1) $\overrightarrow{PQ} \parallel \overrightarrow{PR}$ となればよい．故に $k \in \mathbb{R}$ として

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{PQ} =& k\overrightarrow{PR}\\
\begin{pmatrix} \frac{1}{2}t-1 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}t \end{pmatrix} =& k\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \sqrt{3}t+\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

このような k の存在条件を求めればよい．ゆえに k を消去して

$$
\begin{aligned}
\frac{\sqrt{3}}{2}t =& (2-t)(\sqrt{3}t+\frac{\sqrt{3}}{2})\\
t =& \frac{1+\sqrt{5}}{2}
\end{aligned}
$$

よってもとめる値は $t=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\cdots$(答) である．

(2) $\triangle AOB$ の面積は $\dfrac{\sqrt{3}}{4}\,\mathrm{cm}^2$ であるから，時刻 t での $\triangle PQR$ の面積がこれに等しい時，

$$
\begin{aligned}
\frac{\sqrt{3}}{4} =& \frac{1}{2}\left|\left(\frac{1}{2}t-1\right)\sqrt{3}\left(t+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}t\right|\\
=& \frac{\sqrt{3}}{4}\left|t^2-t-1\right|
\end{aligned}
$$

これを解いて

$$
\begin{aligned}
&\left|t^2-t-1\right| = 1\\
&\therefore t = 1, 2 \cdots (\text{答})
\end{aligned}
$$

となる．