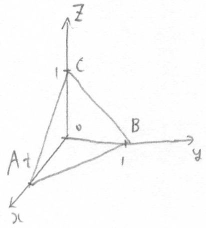
第1問

[解]

(1) $\triangle OBC=\frac{1}{2}$, $\triangle OAC=\triangle OAB=\frac{1}{2}t$



$$\triangle ABC=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{(t^2+1)^2-t^4}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{2t^2+1}$$

だから、四面体 O-ABCの体積を2通りで表して、

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot1\cdot1\cdot t=\frac{1}{3}\cdot r\left(\frac{1}{2}+t+\frac{1}{2}\sqrt{2t^2+1}\right)$$

$$t=r\left(1+2t+\sqrt{2t^2+1}\right)$$

$$\therefore r=\frac{t}{1+2t+\sqrt{2t^2+1}}\ //$$

(2) Pの体積V_1, O-ABCの体積V_2, $f(t)=\frac{V_1}{V_2}$とおく。

$$V_1=\frac{4}{3}\pi r^3$$

$$V_2=\frac{1}{6}t$$

より、

$$f(t)=8\pi\frac{r^3}{t}=8\pi\frac{t^2}{(1+2t+\sqrt{2t^2+1})^3}$$

$g(t)=1+2t+\sqrt{2t^2+1}$ とおくと、$g'(t)=2+\frac{4t}{2\sqrt{2t^2+1}}$ で、

$$\frac{f'(t)}{8\pi}=\frac{2t(g(t))^3-t^2\cdot3(g(t))^2\cdot g'(t)}{(g(t))^6}$$

$$=\frac{t}{(g(t))^4}\left[\underbrace{2g(t)-3tg'(t)}\right]$$

より、$f'(t)$の符号は〜部($h(t)$とおく)にひとしい。

$$h(t)=2(1+2t+\sqrt{2t^2+1})-3t\left(2+\frac{2t}{\sqrt{2t^2+1}}\right)$$

$$=2-2t+2\sqrt{2t^2+1}-\frac{6t^2}{\sqrt{2t^2+1}}$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{2t^2+1}\cdot h(t)=(1-t)\sqrt{2t^2+1}+(1-t^2)$$

$$=(1-t)\left(1+t+\sqrt{2t^2+1}\right)$$

より、下表をうる

t	0		1	
f'		$+$	0	$-$
f		↗		↘

$\left(g(1)=3+\sqrt{3}\right)$

よって $t=1$ で max をとる。

$$f(1)=\frac{8\pi}{(3+\sqrt{3})^3}=\frac{18-10\sqrt{3}}{9}\pi\ //$$

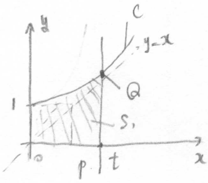
第 2 問

[解] $s=\sin\theta$, $c=\cos\theta$, $x=\tan\theta$ とおく. $0\leq\theta<\pi/2$ で $x=\tan\theta$ は非負だから

$$x^2=\frac{1-c^2}{c^2}=1/c^2-1=y^2-1$$

$$\therefore\ x^2-y^2=-1$$

$0\leq\theta<\pi/2$ から $0\leq x$, $1\leq y$ で 概形は下図



(1) $S_1=\int_0^t\sqrt{x^2+1}\,dx$

$$=\frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2+1}+\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]_0^t$$

$$=\frac{1}{2}\left[t\sqrt{t^2+1}+\log\left(t+\sqrt{t^2+1}\right)\right]$$ //

$S_2=\frac{1}{2}t\sqrt{t^2+1}$ //

(2) $S_1-S_2=\frac{1}{2}\log\left(t+\sqrt{t^2+1}\right)$ だから

$$(与式)=\frac{1}{2}\frac{\log\left(t+\sqrt{t^2+1}\right)}{\log t}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\log t+\log\left(1+\sqrt{1+1/t^2}\right)}{\log t}$$

$$\longrightarrow\frac{1}{2}\quad(t\to\infty)$$ //