第 1 問

[解] $\begin{cases} a \geq 0 > b \\ a, b, t \in \mathbb{R} \end{cases}$ ⋯①

(1) $X = \frac{1}{2}t + \frac{5}{t^2+1}$, $Y = \frac{1}{2}t - \frac{5}{t^2+1}$ とおくと, $X+Y=t$, $X-Y=\frac{10}{t^2+1}$ となる。漸化式の両辺足し引きして,

$$\begin{cases} a_{n+1}+b_{n+1} = (X+Y)(a_n+b_n) = t(a_n+b_n) \\ a_{n+1}-b_{n+1} = (X-Y)(a_n+b_n) = \frac{10}{t^2+1}(a_n-b_n) \end{cases}$$

これと初期条件 $a_1=a$, $b_1=b$ から、等比数列の公式から,

$$\begin{cases} a_n+b_n = t^{n-1}(a+b) \\ a_n-b_n = \left(\frac{10}{t^2+1}\right)^{n-1}(a-b) \end{cases}$$

両辺足して,

$$a_n = \frac{1}{2}(a+b)t^{n-1} + \frac{1}{2}(a-b)\left(\frac{10}{t^2+1}\right)^{n-1}$$

//

(2) $A=\frac{a+b}{2}$, $B=\frac{a-b}{2}$ とする。さらに, $S=\frac{10}{t^2+1}$ とすると(1)から,

$$a_n = A\cdot t^{n-1} + B\cdot S^{n-1}$$

となる。以下 a_n が収束する条件をかんがえる。①から, $B>0$ であることに注意する。まず $A \neq 0$ のとき,

1° $|t|<S \Leftrightarrow -2<t<2$ の時

$a_n = S^{n-1}\left\{B+A\left(\frac{t}{S}\right)^{n-1}\right\}$ において $\left\{B+A\left(\frac{t}{S}\right)^{n-1}\right\} \xrightarrow{n\to+\infty} B\ (\neq 0)$ だから, a_n の収束条件は

$-1<S\leq 1 \Leftrightarrow t\leq -3,\ 3\leq t$

だから, $-2<t<2$ とあわせて, このような t はない。

2° $|t|=S \Leftrightarrow t=\pm 2$ の時

$$\begin{cases} t=2 \text{ の時, } a_n = a\cdot 2^{n-1} \text{ だから, ①より, 収束条件は } a=0 \\ t=-2 \text{ の時 } a_n = A(-2)^{n-1}+B\cdot 2^{n-1} \text{ だから, ①より, } a_n \text{ は収束しない。} \end{cases}$$

3° $|t|>S \Leftrightarrow t<-2$ or $2<t$ の時

$a_n = t^{n-1}\left\{A+B\left(\frac{S}{t}\right)^{n-1}\right\}$ である。$\left\{A+B\left(\frac{S}{t}\right)^{n-1}\right\} \xrightarrow{n\to\infty} A\ (\neq 0)$ より収束条件は $-1<t\leq 1$ だが "$t<-2$ or $2<t$" に反し矛盾。

次に $A=0 \Leftrightarrow a+b=0$ の時, 条件は, $a_n = B\cdot S^{n-1}$ より, $-1<B\leq 1 \Leftrightarrow t\leq -3,\ 3\leq t$

以上から, もとめる条件は,

「$a+b=0 \wedge (t\leq -3$ or $3\leq t)$」又は「$a+b\neq 0 \wedge a=0 \wedge t\neq 2$」

//

である。

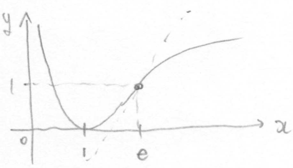
第 2 問

[解] $C: y=(\log x)^2 \equiv f(x) \quad (x>0)$

(1) $f'(x)=2\frac{\log x}{x} \quad f''(x)=2\frac{1-\log x}{x^2}$ から 下表をうる

x	0		1		e	
f'		−	0	+	+	+
f''		+	+	+	0	−
f		↘	0	↗	1	↗

これと、$f(x) \to +\infty \ (x \to 0, +\infty)$ から、グラフは下図



(2) $P(\alpha, f(\alpha))$ での接線 $L(\alpha)$ は、

$$L(\alpha): y=l(x)=2\frac{\log\alpha}{\alpha}(x-\alpha)+f(\alpha)$$

であるから、$L(\alpha)$ と C の共有点の個数は

$$l(x)=f(x)$$

$$(\log x)^2-(\log\alpha)^2-2\frac{\log\alpha}{\alpha}(x-\alpha)=0 \quad \cdots ①$$

の $x>0$ の解の個数にひとしい。(x に対して $f(x)$ が 1対1対応)

①の左辺 $g(x)$ とおく。$g(x)$ には平均値の定理が適用可能で;

$x \neq \alpha$ の時

$$g(x)=(x-\alpha)g'(c)$$

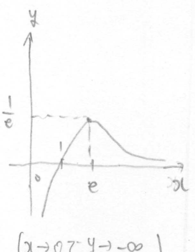
をみたす c が x と α の間にある。ここで $g'(x)=2\left(\frac{\log x}{x}-\frac{\log\alpha}{\alpha}\right)$

であること及び、$f''(x)$ の表から $y=\frac{\log x}{x}$ のグラフが下図である

ことから；$x \neq \alpha$ での $g(x)=0$ の解の数は

以下の通り

$$\begin{cases} 0<\alpha\leq 1 & \cdots 0コ \\ 1<\alpha \ (\alpha \neq e) & \cdots 1コ \\ \alpha=e & \cdots 0コ \end{cases}$$



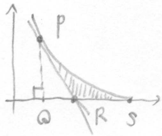
$\begin{pmatrix} x\to 0 で y \to -\infty \\ x \to +\infty で y \to 0 \end{pmatrix}$

α の値によらず、$x=\alpha$ は解だから

$$\begin{cases} 0<\alpha\leq 1, \ \alpha=e & \cdots 1コ \\ 1<\alpha \ (\alpha \neq e) & \cdots 2コ \end{cases}$$

//

(3) P から x 軸に下ろした垂足 Q，$L(\alpha)$ と x 軸の交点、R、S(1, 0) とおく.



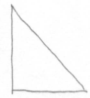
$$\triangle PQR=\frac{1}{2}(\log\alpha)^2\cdot\left(-\frac{1}{2}\alpha\log\alpha\right)$$

$$=-\frac{1}{4}\alpha(\log\alpha)^3 \quad \cdots ①$$

 $=\int_\alpha^1 (\log x)^2 dx$

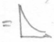
$$=\left[x(\log x)^2-2x\log x+2x\right]_\alpha^1$$

$$=2-\left(\alpha(\log\alpha)^2-2\alpha\log\alpha+2\alpha\right) \quad \cdots ②$$



$$-\frac{(\log\alpha)^2}{2\frac{\log\alpha}{\alpha}}=-\frac{1}{2}\alpha\log\alpha$$

①、②から

$S(\alpha)=$  $-\triangle PQR$

$$=2-\alpha(\log\alpha)^2+2\alpha\log\alpha-2\alpha+\frac{1}{4}\alpha(\log\alpha)^3$$

//