第 1 問

[解] $P(X, Y, 0)$, $O'(0, 0, 1)$とする。CPとO'のキョリが1以下なら良い。

$$CP : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} X-a \\ Y \\ -3 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R})$$

だから、CP上の点Qとして、

$$|OQ'|^2 = \{a + t(X-a)\}^2 + (tY)^2 + \{3 - 3t - 1\}^2$$

$$= \{(X-a)^2 + Y^2 + 9\} t^2 + 2(aX - a^2 - 6)t + a^2 + 4$$

これは、$t = -\dfrac{aX - a^2 - 6}{(X-a)^2 + Y^2 + 9}$の時minとなる。よって、条件は

$$\min |OQ|^2 \leq 1$$

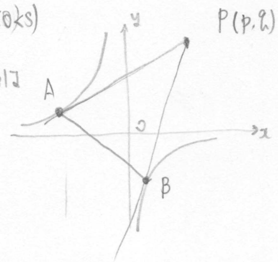
$$\Leftrightarrow a^2 + 4 - \frac{(aX - a^2 - 6)^2}{(X-a)^2 + Y^2 + 9} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{(X+a)^2}{a^2+3} + \frac{Y^2}{3} \leq 1$$

//

第2問

[解] $A\left(m, -\frac{1}{m}\right)$, $B\left(s, -\frac{1}{s}\right)$ $(m<0<s)$



として良い。A, Bでの接線 l_A, l_B は

$$\begin{cases} l_A : y = \frac{1}{m^2}x - \frac{2}{m} \\ l_B : y = \frac{1}{s^2}x - \frac{2}{s} \end{cases}$$

この交点が P であり, $t \neq s$ から,

$$\begin{cases} p = \dfrac{2}{\frac{1}{m}+\frac{1}{s}} = \dfrac{2ms}{m+s} \\ q = -\dfrac{2}{m+s} \end{cases} \quad \cdots *$$

である.

$$\overrightarrow{PA} = \begin{pmatrix} m-p \\ -\frac{1}{m}-q \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{PB} = \begin{pmatrix} s-p \\ -\frac{1}{s}-q \end{pmatrix}$$

よりサラスの公式から △PABの面積 f として

$$f = \frac{1}{2}\left|(m-p)\left(-\frac{1}{s}-q\right) - (s-p)\left(-\frac{1}{m}-q\right)\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left|\frac{m(m-s)}{m+s}\frac{(s-m)}{s(m+s)} - \frac{s(s-m)}{m+s}\frac{(m-s)}{m(m+s)}\right|$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{(m+s)^2}\left|(m+s)(s-m)\left\{\frac{m}{s}-\frac{s}{m}\right\}\right|$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{(m+s)^2}\left|\frac{(s-m)^3(m+s)}{sm}\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left|\frac{(s-m)^3}{sm(m+s)}\right| \quad \cdots ①$$

ここで, $t = pq = -4\frac{ms}{(m+s)^2}$; $\alpha = m+s$, $\beta = s-m$ とおくと, $\cdots ②$

$$sm = \frac{1}{4}\left[(m+s)^2-(s-m)^2\right] = \frac{1}{4}(\alpha^2-\beta^2)$$

だから, ①に代入して

$$f = \frac{1}{2}\left|\frac{\beta^3}{\frac{1}{4}(\alpha^2-\beta^2)\alpha}\right| = 2\left|\frac{\beta^3}{\alpha(\alpha^2-\beta^2)}\right| \quad \cdots ③$$

一方,

$$t = -4\frac{\frac{1}{4}(\alpha^2-\beta^2)}{\alpha^2} = -\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2} = -1+\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 \quad \cdots ④$$

$a = \frac{\alpha}{\beta}$ とおくと, ③,④から $(\because \beta \neq 0)$

$$f = 2\left|\frac{1}{a(a^2-1)}\right|, \quad t = -1+\frac{1}{a^2}$$

第2式から $|a| = \sqrt{\frac{1}{t+1}}$ だから

$$f = 2\left|\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{t+1}}\left(\frac{1}{t+1}-1\right)}\right| = 2\sqrt{t+1}\,\frac{t+1}{t} \quad (\because t>0) \; //$$

ここで, $p>0$, $q>0$ 及び*, $m<0<s$ から

$$ms<0, \quad m+s<0,$$

逆にこの時, $m<0<s \in \mathbb{R}$ なる m, s が存在し十分であるから, t の値域は

$t>0$ $\cdots ⑤$ である

$$f = 2\sqrt{\frac{(t+1)^3}{t^2}}$$

$q = t^{1/3}$ とおくと, ⑤から $q>0$ で,

$$f = 2\sqrt{\left(q+\frac{1}{q^2}\right)^3}$$

$$= 2\left(\frac{1}{2}q+\frac{1}{2}q+\frac{1}{q^2}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$\geq 2\left(3\sqrt[3]{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}\right)^{\frac{3}{2}} \quad (\because q>0 \text{ から AM-GM, } q=\sqrt[3]{2} \text{ で等号成立})$$

$$= 3\sqrt{3} \; //$$