第 1 問

[解] (2)のnを$n=1$にまで拡張して考える。

$n=1$の時. $0<a_1$, $a_1x_1 \le a_1y_1$ から 両辺$a_1>0$でわって

$$x_1 \le y_1 \quad \cdots ①$$

$n\ge2$に対して常に①が成立する。(2)の命題を◇として、◇をnに関する帰納法で示す。ここで

$$A_j : \sum_{i=1}^{j} a_i x_i \le \sum_{i=1}^{j} a_i y_i \quad (j=1.2.\cdots.n)$$

とおく。

1° $n=2$の時

A_2から

$$a_2(x_2-y_2) \le a_1(y_1-x_1) \le a_2(y_1-x_1) \quad (\because a_1 \le a_2, ①)$$

だから両辺$a_2>0$でわって

$$x_2-y_2 \le y_1-x_1 \iff x_1+x_2 \le y_1+y_2$$

より. $n=2$では◇は成立 $_{//}$ (1)

2° $n \le k$ $(k \in \mathbb{N}_{\ge2})$での成立を仮定

A_j $(j=3.4.\cdots k+1)$について. 1°と同じく. ①から

$$a_2(x_2-y_2)+\sum_{i=3}^{j+1} a_i x_i \le a_1(y_1-x_1)+\sum_{i=3}^{j} a_i y_i \le a_2(y_1-x_1)+\sum_{i=3}^{j+1} a_i y_i \cdots ②$$

が成り立つ。ここで. 数列$\{a_i'\}\{X_i\},\{Y_i\}$を,

$$\begin{cases} a_i' = a_{i+1} & (i=1.2.\cdots.k) \\ X_1 = x_2-y_2, \ X_i = x_{i+1} & (i=2.3.\cdots.k) \\ Y_1 = y_1-x_1, \ Y_i = y_{i+1} & (i=2.\cdots.k) \end{cases} \quad \cdots ③$$

と定めると, $\{a_i'\},\{X_i\},\{Y_i\}$は,

$$\begin{cases} 0<a_1' \le a_2' \le \cdots \le a_k' \\ \sum_{i=1}^{j} a_i' X_i \le \sum_{i=1}^{j} a_i' Y_i & (j=1.2.\cdots.k) \end{cases}$$

をみたす (②及び1°) から. これに帰納法の仮定を用いて.

$$\sum_{i=1}^{k} X_i \le \sum_{i=1}^{k} Y_i$$

③から

$$\sum_{i=2}^{k+1} x_i - y_2 \le \sum_{i=3}^{k+1} y_i + y_1 - x_1$$

$$\iff \sum_{i=1}^{k+1} x_i \le \sum_{i=1}^{k+1} y_i$$

より. $n=k+1$でも◇は成立。

以上1°, 2°から. 任意の$n \in \mathbb{N}_{\ge2}$に対し◇は成立する。よって題意は示された□

第 2 問

[解] $a_k=\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}x^2|\sin n\pi x|\,dx$ とおく。$f(x)=x^2$ とおき、$\left[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}\right]$ で $f(x)$ の最大・小値を与える x を、各 M_k, m_k とすると、$|\sin n\pi x|\geq 0$ から.

$$f(m_k)|\sin n\pi x|\leq f(x)|\sin n\pi x|\leq f(M_k)|\sin n\pi x|$$

積分して

$$f(m_k)\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}|\sin n\pi x|\,dx\leq a_k\leq f(M_k)\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}|\sin n\pi x|\,dx \quad \cdots ①$$

ここで $\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}|\sin n\pi x|\,dx=\frac{2}{n\pi}$ だから. ①に代入して

$$\frac{2}{\pi}\frac{1}{n}f(m_k)\leq a_k\leq\frac{2}{\pi}\frac{1}{n}f(M_k)$$

k について和をとって

$$\frac{2}{\pi}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(m_k)\leq I_n\leq\frac{2}{\pi}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(M_k) \quad \cdots ②$$

区分求積から, $n\to\infty$ の時

$$\begin{cases}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(m_k)\longrightarrow\int_0^1 f(x)\,dx=\frac{1}{3}\\ \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(M_k)\longrightarrow\int_0^1 f(x)\,dx=\frac{1}{3}\end{cases}$$

だから、②及び区分求積から

$$I_n\longrightarrow\frac{2}{3\pi}$$

//