第1問

[解] $f(x)=x^3-n_1x+(-1)^{n_2}n_3$ とおく.

(1) $f'(x)=3x^2-n_1$ から、下表をうる

x		$-\sqrt{n_1/3}$		$\sqrt{n_1/3}$	
f'	+	0	−	0	+
f	↗		↘		↗

したがって、$f(x)=0$ が3異実解を持つ時

$$f(\sqrt{n_1/3})\,f(-\sqrt{n_1/3})<0$$

$$\left(\frac{n_1}{3}\sqrt{\frac{n_1}{3}}-n_1\sqrt{\frac{n_1}{3}}+(-1)^{n_2}n_3\right)\left(\frac{2}{3}n_1\sqrt{\frac{n_1}{3}}+(-1)^{n_2}n_3\right)<0$$

$$-\frac{2}{3}n_1\sqrt{\frac{n_1}{3}}<(-1)^{n_2}n_3<\frac{2}{3}n_1\sqrt{\frac{n_1}{3}} \quad \cdots ①$$

$A=\frac{2}{3}n_1\sqrt{\frac{n_1}{3}}$, $B=(-1)^{n_2}n_3$ とおく。下表をうる.

n_1	1	2	3	4	5	6
A	$\frac{2}{9}\sqrt{3}$	$\frac{4}{9}\sqrt{6}$	2	$\frac{16}{9}\sqrt{3}$	$\frac{10}{9}\sqrt{15}$	$4\sqrt{2}$

$\frac{2}{9}\sqrt{3}<1<\frac{4}{9}\sqrt{6}<2<3<\frac{16}{9}\sqrt{3}<4<\frac{10}{9}\sqrt{15}<5<4\sqrt{2}<6$ である

から、n_1 に対して①をみたす n_3 は以下 (n_2 は任意)

n_1	1	2	3	4	5	6
n_3	なし	1	1	1〜3	1〜4	1〜5

したがってもとめるカクリツは

$$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}=\frac{14}{36}=\frac{7}{18}$$ //

(2) 自然数解 k とおく

$$k(k^2-n_1)=-(-1)^{n_2}n_3$$

から、k は n_3 の約数であることが必要。これより k, n_3 で場合分け (e: even, o: odd)

n_3	1	2	3	4	5	6
$\binom{k}{k^2-n_1}$	$\binom{1}{-1}$	$\binom{1}{-2}$, $\binom{2}{\pm1}$	$\binom{1}{-3}$	$\binom{1}{-4}$, $\binom{2}{\pm2}$	$\binom{1}{-5}$	$\binom{2}{\pm3}$

n_3	1	2	3	4	5	6
(k,n_1)	(1,2)	(1,3), (2,3), (2,5)	(1,4)	(1,5), (2,2), (2,6)	(1,6)	(2,1)

各々に対し、n_2 は3通りずつ (even or odd) が1対1に対応するので、

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{10}{36}=\frac{5}{36}$$ //

第 2 問

[解] $0<x<\pi/2$ …① である。以下 $C=\cos x$, $S=\sin x$, $t=\tan x$ とする。①のもとで $S<x<t$ だから、

$$\begin{cases} f'(x)=\dfrac{t-\frac{1}{c^2}\cdot x}{t^2}=\dfrac{sc-x}{s^2}<0 & (\because ①\text{及び.同区間で } x>s,\ 0<c<1) \\ f''(x)=\left(\dfrac{1}{t}-\dfrac{x}{s^2}\right)'=-\dfrac{1}{s^2}-\dfrac{s^2-x\cdot 2s\cdot c}{s^4}=\dfrac{2c(x-t)}{s^3}<0 & (\because ①\text{で } x<t) \end{cases} \cdots ②$$

又. $g(x)=f(x)+\dfrac{1}{f(x)}$ だから. $f(x)=f$ などと略記して.

$$\begin{cases} g'(x)=f'+\dfrac{f'}{f^2}=f'\left(1-\dfrac{1}{f^2}\right)>0 & (\because ②\text{及び. } 0<f<1 \text{ から } 1-\frac{1}{f^2}<0) \\ g''(x)=f''\left(1-\dfrac{1}{f^2}\right)+f'\left(2\dfrac{f'}{f^3}\right)>0 & (\because ②\text{及び. } 0<f<1) \end{cases} \cdots ③$$

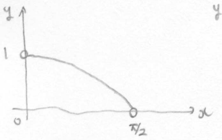
以上②③から.

$f'(x)<0,\ f''(x)<0,\ g'(x)>0,\ g''(x)>0$ //

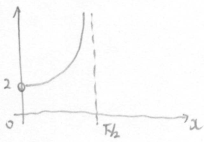
又、

$$\begin{cases} f(x)\xrightarrow{x\to 0}1,\ f(x)\xrightarrow{x\to\pi/2}0 \\ g(x)\xrightarrow{x\to 0}2,\ g(x)\xrightarrow{x\to\pi/2}+\infty \end{cases}$$

とあわせて. $y=f$, $y=g$ のグラフは以下のようになる。



$(y=f)$



$(y=g)$

//

(以上(1), (2))

(3) $h(x)=\log\dfrac{a}{f(x)}-g(x)$ とおく。$0<x<\pi/2$ で. $h(x)=0$ が実解を持つ条件をもとめれば良い。以下 $A=\log a$ とする。ここで $h'(x)$ を計算すると、

$$h'(x)=-\frac{f'(x)}{f(x)}-g'(x)=-\frac{f'}{f}-f'\left(1-\frac{1}{f^2}\right) \quad (\because ③)$$

$$=\frac{-f'}{f^2}(1-f-f^2)$$

であり. (1)及び. $0<f<1$ から. $f(x)=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ なる x がただ1つあって. これを $x=\alpha$ とすると.

下表をうる。

x	(0)		α		$(\pi/2)$
h'		$+$	0	$-$	
h	$(A-2)$	↗		↘	$(-\infty)$

$f(\alpha)=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$, $g(\alpha)=f(\alpha)+\dfrac{1}{f(\alpha)}=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}+\dfrac{2}{-1+\sqrt{5}}=\sqrt{5}$ より.

$$h(\alpha)=A-\log f(\alpha)-g(\alpha)$$

$$=A-\log\frac{-1+\sqrt{5}}{2}-\sqrt{5}$$

$$=A-\log\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\cdot e^{\frac{5}{2}}$$

である。したがって. 表とあわせて題意の条件は.

$$h(\alpha)\geq 0 \Leftrightarrow A\geq \log\frac{-1+\sqrt{5}}{2}e^{\frac{5}{2}} \Leftrightarrow a\geq \frac{-1+\sqrt{5}}{2}e^{\frac{5}{2}}$$ //

($\because \log x$ は単調増加)