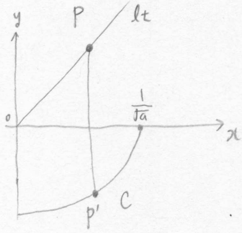
# 第1問

[解] $a, b > 0$ …①




(1) $C: ax^2 + by^2 = 1 \quad (x \geq 0,\ y \leq 0)$

$l_t: y = tx \quad (t \geq 0,\ x \geq 0)$

$P(X, tX)$, $P'(X, Y)$とおける。この時、

$$Y = \frac{-1}{\sqrt{b}}\sqrt{1-aX^2}$$

であり、又 $0 \leq X \leq \frac{\sqrt{a}}{a}$ …② である。$\overline{PP'} = g(X)$として、

$$g(X) = tX + |Y| = tX + \frac{\sqrt{b}}{b}\sqrt{1-aX^2}$$

より、

$$g'(X) = t + \frac{\sqrt{b}}{b}\frac{-2aX}{2\sqrt{1-aX^2}} = \frac{(bt)^2 - \{(bt)^2 a + a^2 b\}X^2}{b\sqrt{1-aX^2}\{bt\sqrt{1-aX^2} - a\sqrt{b}X\}}$$

だから、下表をうる。

| $X$ | $0$ | | $\alpha$ | | $\sqrt{a}/a$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $g$ | | | | | |

$$\left(\alpha = \sqrt{\frac{(bt)^2}{(bt)^2 a + a^2 b}}\right)$$

よって $X = \alpha$ で $g(X)$は最大だから、$P_t$の座標は

$$X = \alpha,\ Y = t\alpha$$

で与えられる。次に$t$をうごかす。$t=0$の時$P_0(0,0)$であり、$t \neq 0$の時、$X \neq 0$から$t = \frac{Y}{X}$

だから、$X = \alpha$に代入して

$$X = \sqrt{\frac{\left(b\frac{Y}{X}\right)^2}{\left(b\frac{Y}{X}\right)^2 a + a^2 b}} \iff X^2\left\{b^2\frac{Y^2}{X^2}a + a^2 b\right\} = b^2\frac{Y^2}{X^2} \quad (\because X \geq 0)$$

$$\iff Y^2(b - abX^2) = a^2 X^4$$

$$\iff Y = \frac{aX^2}{\sqrt{b(1-aX^2)}} \quad \left(\because X = \frac{\sqrt{a}}{a}\text{は不適だから}\ 0 < X < \frac{\sqrt{a}}{a},\ Y \geq 0\right)$$

したがって、$t=0$とあわせて、

$$f(x) = \frac{aX^2}{\sqrt{b(1-aX^2)}} \quad \left(0 \leq X < \frac{\sqrt{a}}{a}\right)$$

//

(2) $y$を消して、$p = x^2$とおくと、

$$ap + b\frac{(ap)^2}{b(1-ap)} = 1$$

さらに$q = ap$として整理して$q = \frac{1}{2}$だから、$x \geq 0$とあわせて、

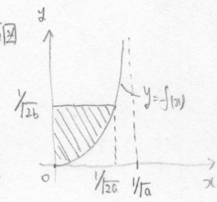
$$x = \sqrt{\frac{1}{2a}},\quad y = \sqrt{\frac{1}{2b}}$$

だから

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{2a}},\quad \beta = \sqrt{\frac{1}{2b}}$$

//

(3) $f(x)$は区間内で単調増加だから、グラフの概形は右図




$x \sim x + \Delta x \ (\Delta x \ll 1)$の部分を$y$軸まわりに回した立体の体積は、幅$\Delta x$、高さ$1/\sqrt{2b} - f(x)$、長さ$2\pi x$の直方体で近似できるので、求める立体の体積$V$として、

$$V = 2\pi\int_0^{\sqrt{\frac{1}{2a}}}\left(\sqrt{\frac{1}{2b}} - f(x)\right)\cdot x\,dx \quad \cdots ②$$

である。ここで、

- $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\frac{1}{2a}}}\sqrt{\frac{1}{2b}}\cdot x\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2b}}\cdot\frac{1}{2a} = \frac{1}{4\sqrt{2}}\frac{1}{a}\sqrt{\frac{1}{b}}$ …③

- $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\frac{1}{2a}}} f(x)\cdot x\,dx = \int_1^{\frac{1}{2}}\frac{1-t}{\sqrt{bt}}\frac{1}{-2a}dt \quad (t = 1 - ax^2)$

$$= \frac{1}{2a}\sqrt{\frac{1}{b}}\int_{1/2}^{1}\left(\frac{1}{\sqrt{t}} - \sqrt{t}\right)dt = \frac{1}{2a}\sqrt{\frac{1}{b}}\left[2\sqrt{t} - \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_{1/2}^{1}$$

$$= \frac{1}{2a}\sqrt{\frac{1}{b}}\left[2\left(1 - \sqrt{\frac{1}{2}}\right) - \frac{2}{3}\left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}\right)\right] = \frac{1}{2a}\sqrt{\frac{1}{b}}\left(\frac{4}{3} - \frac{5}{6}\sqrt{2}\right) \quad \cdots ④$$

だから、③④を②に代入して、

$$V = 2\pi\left[\frac{\sqrt{2}}{8}\frac{1}{a}\sqrt{\frac{1}{b}} - \frac{1}{2a}\sqrt{\frac{1}{b}}\left(\frac{4}{3} - \frac{5}{6}\sqrt{2}\right)\right]$$

$$= \frac{2\pi}{a\sqrt{b}}\left[\frac{13}{24}\sqrt{2} - \frac{2}{3}\right]$$

//

## 第2問

[解] $3a=b^3,\ 5a=c^2$ …①

(1) ①から. $b, c$は各々 3.5で割り切れる($\because$ 3.5 $\in$ prime) したがって.

$b'=\frac{1}{3}b,\ c'=\frac{1}{5}c\ (\in \mathbb{N})$ として. ①に代入

$$a=9b'^3,\quad a=5c'^2 \quad \cdots ②$$

より. $a$は 3と5で割り切れる □

(2) $a$の素因数 $p$ ($p\neq 3.5,\ p\in \mathbb{N}\neq 1$)があると仮定する。すると(1)と同様に、

$a=pa',\ b'=pb'',\ c'=pc''$ なる $a', b'', c''\in \mathbb{N}$が存在する。②に代入、

$$a'=9p^2 b''^3=5pc''^2$$

したがって. $a'$が$p^2$で割り切れるので; $a'=p^2a''$ なる$a''\in \mathbb{N}$が存在する.

$$a''=9b''^3=\frac{5c''^2}{p}$$

ここで. $p\perp 5$ 及び $\frac{5c''^2}{p}\in \mathbb{N}$から. $c''$が$p$で割り切れて. $c''=pc'''$なる

$c'''\in \mathbb{N}$がある.

$$a''=9b''^3=5pc'''^2$$

$9\perp p$から. $b''$が$p$で割り切れ, したがって $a''$が$p^3$で割り切れる。

以上から. $a$は$p^6$で割り切れる. …③

一方.題意から $\alpha^t$ ($t\in \mathbb{N}\geq 6$) の形の素因数を$a$はもたない. …④

③.④より矛盾が生じ, したがって $p=1,3,5$ となり.題意は示された □

(3) (1).(2)から. $a=3^k\cdot 5^l$ ($k, l\in \mathbb{N}\leq 5$) とおける。②に代入

$$3^k\cdot 5^l=9\cdot b'^3=5\cdot c'^2$$

したがって. $b'=3^n 5^m,\ c'=3^x\cdot 5^y$ ($n.m.x.y\in \mathbb{Z}$, 0～5) とおけて,

$$3^k\cdot 5^l=3^{3n+2}\cdot 5^{3m}=3^{2x}\cdot 5^{2y+1}$$

$$\therefore \begin{cases} k=3n+2=2x \\ l=3m=2y+1 \end{cases}$$

これをみたす$(k, l)$は $(k, l)=(2,3)$ のみで;

$$a=3^2\cdot 5^3$$

//