第 1 問

[解]

(1) $n=4$の時、4つのものを1,2,3,4（はじめの左からの位置）で表す。

2143　　3142　　4123
2413　　3412　　4312
2341　　3421　　4321

の9通り

(2) nつの場所を左から$a_1, a_2, \cdots, a_n$とする。nつのものを、はじめの左からの位置と対応して$1, 2, \cdots, n$とする。対称性から$a_1=2, 3, \cdots, n$となる並べ方は等しいので、以下$a_1=2$として考える。

1° $a_2=1$の時

$a_3, a_4, \cdots, a_n$に$3, 4, \cdots, n$を、題意をみたすように並べれば良く、$D(n-2)$通り。

2° $a_2 \neq 1$の時

a_2をa_1とおきかえれば、1°と同じく、$D(n-1)$通り

以上から

$$D(n) = (n-1)\{D(n-1)+D(n-2)\}$$

である。図

[解] $n \in \text{even} \geq 2$ …①, $f_n(x) = x^n$, $g_n(x) = n^x$ とおく。

(1) $x<0$ の時. $t=-x$ とすると, $t>0$ であり.

$$f_n(x) = g_n(x) \Leftrightarrow t^n = \left(\frac{1}{n}\right)^t \quad (\because ①)$$

両辺正から.自然対数をとって.

$$n \log t = -t \log n$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log t}{t} = -\frac{\log n}{n} \quad (\because t.n>0) \quad \cdots ②$$

である.ここで $h(x) = \dfrac{\log x}{x}$ とおくと, $h'(x) = \dfrac{\log x - 1}{x^2}$ から下表をうる。

x	(0)		e	
h'		$-$	0	$+$
h		$\nearrow$		$\searrow$

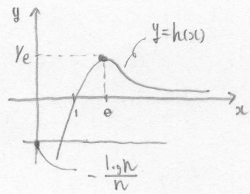
$$\begin{pmatrix} h(x) \longrightarrow -\infty \ (x \to +0) \\ h(x) \longrightarrow 0 \ (x \to +\infty) \end{pmatrix}$$

より,グラフは右図。ここで ①から, $\dfrac{\log n}{n} > 0$ だから,

グラフから,②で等号が成立する t が $0<t<1$ に

ただ1つ存在し,したがって C_1, C_2 は $x<0$ に

ただ1つ交点を持つ。□



(2) $x>0$ の時. f, g 共に正だから.(1)と同様に

$$f_n(x) = g_n(x) \Leftrightarrow n \log x = x \log n \Leftrightarrow \frac{\log x}{x} = \frac{\log n}{n}$$

①から. $\dfrac{\log n}{n} > 0$ だから.グラフから.これをみたす x は2つある。 …③

$x=0$ の時. $f_n(0)=0$, $g_n(0)=1$ から. C_1, C_2 は交わらない。 …④

C_1, C_2 の交点の数は $f_n(x) = g_n(x)$ の実解の数に等しいことと,③④.(1)から,

あわせて 3コ の交点がある。

(3) $P_n(-x_n, y_n)$ とおく。$(0<x_n<1)$ P_n の条件から.

$$y_n = (-x_n)^n = n^{-x_n} \quad \cdots ⑤$$

である.(1)のグラフから. $n \to \infty$ で $\dfrac{\log n}{n} \longrightarrow 0$ だから.②より $\dfrac{\log x_n}{x_n} = -\dfrac{\log n}{n}$ で

あることとあわせて,

$$\frac{\log x_n}{x_n} \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty)$$

で.グラフ及び $0<x_n<1$ から. $x_n \longrightarrow 1 \ (n \to \infty)$ である。 …⑥

⑤に⑥を代入して.

$$y_n = \left(\frac{1}{n}\right)^{x_n} \xrightarrow{n \to \infty} 0 \quad \cdots ⑦$$

だから.⑥⑦より. $P_n \xrightarrow{n \to \infty} (-1, 0)$ である。