[解] (1) $x \in \mathbb{R}$ から $-x^2 \neq 1$ なので

$$(与式) = \frac{1-(-x^2)^{n+1}}{1-(-x^2)} - \frac{1}{1+x^2}$$

$$= \frac{-(-x^2)^{n+1}}{1+x^2} \quad //$$

(2) (1)の両辺のゼッタイ値をとって $[0,1]$ で積分する

$$\left| \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} (-x^2)^k - \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx \right| = \left| \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2} dx \right| \quad \cdots ①$$

又、

$$\int_0^1 \sum_{k=0}^{n} (-x^2)^k dx = \sum_{k=0}^{n} \left[\frac{(-1)^k \cdot x^{2k+1}}{2k+1} \right]_0^1 = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} \quad \cdots ②$$

$$\int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2} dx \leq \int_0^1 x^{2n+2} dx = \frac{1}{2n+3} \quad (\because 区間内で\ 0 \leq x \leq 1) \quad \cdots ③$$

だから ②③を①に代入

$$\left| \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} - \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx \right| \leq \frac{1}{2n+3} \quad \square$$

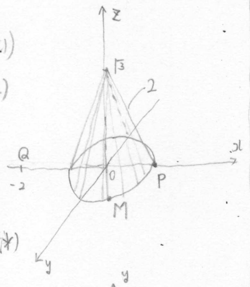
(3) $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{4}$ と(2)から、(与式) $\longrightarrow \frac{\pi}{4}$ $(n \to \infty)$ //

第 2 問

[解] (1) xy平面で考える。Qを通る$x^2+y^2=1$の接線は

$y=\pm\frac{1}{2}(x+2)$であり、この時の接点は$\left(\cos\left(\pm\frac{2}{3}\pi\right), \sin\left(\pm\frac{2}{3}\pi\right)\right)$

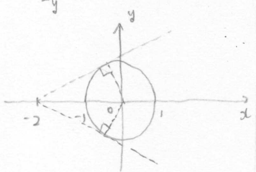
だから、θのとりうる範囲は $\frac{2}{3}\pi \leq \theta \leq \frac{4}{3}\pi$ //　$(\because 0\leq\theta<2\pi)$



(2) Sの展開図上で線分PMとなる曲線Dとする。

PからQまでの最短経路は、PからMまでD上を通り、

MからQまで直線MQを通る経路である。…(*)



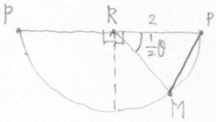
Sの側面の展開図は右下図であり、対称性から

$0\leq\theta\leq\pi$として考え、R$(0, 0, \sqrt{3})$とすると

$$劣弧\overset{\frown}{PM}=\theta$$

だから、

$$\angle MRP=\frac{1}{2}\theta$$



となるので展開図上でのPMの長さ$\ell(\theta)$は

$$\ell(\theta)=4\sin\frac{\theta}{4} \quad \cdots①$$

又、xy平面上で

$$|QM|=\sqrt{(\cos\theta+2)^2+\sin^2\theta}=\sqrt{5+4\cos\theta} \quad \cdots②$$

となる。(*)、①②から、θを固定した時の最短経路の長さ$f(\theta)$は

$$f(\theta)=\ell(\theta)+|QM|$$
$$=4\sin\frac{\theta}{4}+\sqrt{5+4\cos\theta} \quad \cdots③$$

となる。(1)から、この$\frac{2}{3}\pi\leq\theta\leq\pi$でのminをもとめれば良い。以下$t=\sin\frac{\theta}{4}$とする。θの

変域から、$\frac{1}{2}\leq t\leq\frac{\sqrt{2}}{2}$ …③である。③から

$$f(\theta)=4t+\sqrt{9-32t^2(1-t^2)}$$

だから

$$\frac{df}{dt}=4+\frac{128t^3-64t}{2\sqrt{9-32t^2(1-t^2)}}=4\frac{\sqrt{32t^4-32t^2+9}+16t^3-8t}{\sqrt{32t^4-32t^2+9}}$$

となり、

$$\frac{df}{dt}\geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{32t^4-32t^2+9}\geq 8t(1-2t^2)\ (\geq 0) \quad (\because ③)$$

$\Leftrightarrow 32t^4-32t^2+9\geq 64t^2(1-2t^2)^2$　　(∵両辺0以上より2乗して良い)

$\Leftrightarrow 256s^3-288s^2+96s-9\leq 0$　　$\left(s=t^2,\ \frac{1}{4}\leq s\leq\frac{1}{2}\right)$　(∵③)

$\Leftrightarrow \left(s-\frac{3}{8}\right)(256s^2-192s+24)\leq 0$

$\Leftrightarrow \left(s-\frac{3}{8}\right)\left(s-\frac{3+\sqrt{3}}{8}\right)\left(s-\frac{3-\sqrt{3}}{8}\right)\leq 0$

だから、下表をうる。

t	$\frac{1}{2}$		$\frac{\sqrt{6}}{4}$		$\sqrt{2}/2$
s^2	1/4		3/8		1/2
f'		−	0	+	
f		↘		↗	

したがって、$t=\frac{\sqrt{6}}{4}$で $\min f(\theta)=\sqrt{6}+\frac{1}{2}\sqrt{6}=\frac{3}{2}\sqrt{6}$ // をとる。

[解注]

③で、$t=\cos\frac{\theta}{2}$とすると

$$f(\theta)=2\sqrt{2(1-t)}+\sqrt{8t^2+1}$$

となって同様に解決する。(この時$t=1/4$でfはmin)