第 1 問

[解] $a_n = \tan(11n)$

(1) (与式) $\Leftrightarrow \dfrac{15598}{4965} < \pi < \dfrac{15642}{4975}$ …① より①を示す.

(左辺) < 3.141592 , (右辺) > 3.141594 だから.題意と

あわせて①は示された ◻

(2) $\tan\theta$ は周期πの周期関数だから $\tan 11 = \tan(11-3\pi)$ である.

(1)から $\dfrac{\pi}{711} + \dfrac{\pi}{2} < 11 - 3\pi < \dfrac{\pi}{709} + \dfrac{\pi}{2}$ であり.これが$\frac{\pi}{2}$からπの区間内

だから. $\tan(11-3\pi) < 0$ …①

同様に. $\dfrac{2\pi}{711} < 22 - 7\pi < \dfrac{2\pi}{709}$ だから. $\tan(22-7\pi) > 0$ …②

①.②から $a_1 < 0 < a_2$ //

(3) 数列$\{b_n\}$を. $b_n = a_{2n-1}$ によって定めると. $b_n = \tan(22n-11)$で

ある.(1)の各辺 $2n-1$ (>0)倍して.

$$\frac{2n-1}{711}\pi < 22n-11 - \frac{7}{2}(2n-1)\pi < \frac{2n-1}{709}\pi$$

$$\frac{2n-1}{711}\pi + \frac{1}{2}\pi < 22n-11-7n\pi < \frac{2n-1}{709}\pi + \frac{1}{2}\pi \quad \text{…③}$$

$n=1.2.\cdots.355$ の時. $0 < \dfrac{2n-1}{711}\pi < \dfrac{2n-1}{709}\pi \leq \pi$ であり. …④

さらに.

$$\frac{2n+1}{711} - \frac{2n-1}{709} = \frac{1}{711\cdot 709}(-4n+1420) \geq \frac{1}{711\cdot 709}\cdot 0 = 0 \quad \text{…⑤}$$

だから. $t_n = 22n-11-7n\pi$ とおくと ③,④,⑤から

$$\cdot\ \frac{\pi}{2} < t_1 < t_2 < \cdots < t_{355} \leq \pi$$

同区間で $\tan x$ は単調増加だから. $\tan t_k$ $(k=1.2.\cdots.355)$は

単調増加. したがって題意は示された ◻

(4) (3)から $0 < \tan\left(\dfrac{709}{711} + \dfrac{1}{2}\right)\pi < \tan t_{355}$ …⑥ であるが. 一方.

③から $\dfrac{3}{2}\pi < t_{356} < \dfrac{1}{2}\pi + \dfrac{711}{709}\pi$ だから. $\tan t_{356} < 0$ …⑦.

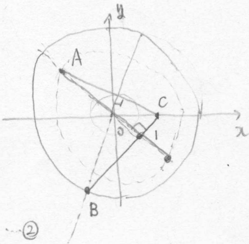
⑥.⑦より $\tan t_{356} < \tan t_{355}$ となり. たしかに $\{b_n\}$ は単調増加

ではない。◻

第 2 問

[解] $A(a\cos\alpha, a\sin\alpha)$ $B(b\cos\beta, b\sin\beta)$ とおく $(0 \leq \alpha, \beta < 2\pi \cdots ①)$ と

$$\overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} a\cos\alpha - 1 \\ a\sin\alpha \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} b\cos\beta - 1 \\ b\sin\beta \end{pmatrix}$$



から $\triangle ABC$ の面積 T として

$$T = \frac{1}{2}\left|(a\cos\alpha - 1)b\sin\beta - a\sin\alpha(b\cos\beta - 1)\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left|ab\sin(\beta-\alpha) - b\sin\beta + a\sin\alpha\right| \quad \cdots ②$$

である。ここで、$\triangle ABC$ の面積が最大の時、A を固定した時、$AO \perp BC$ であり、

$$\begin{pmatrix} b\cos\beta - 1 \\ b\sin\beta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \quad (\because \alpha = \tfrac{3}{4}\pi) \quad \cdots ③$$

これが $\beta = \frac{4}{3}\pi$ の時みたされるので、

$$\frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)b = 1 \quad \therefore b = \sqrt{3}+1 \quad \cdots ④$$

同様に B を固定した時 $OB \perp AC$ で

$$\begin{pmatrix} a\cos\alpha - 1 \\ a\sin\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} = 0 \quad (\because \beta = \tfrac{4}{3}\pi) \quad \cdots ⑤$$

これが $\alpha = \frac{3}{4}\pi$ でみたされるので、

$$\frac{1}{2}(\sqrt{6}-\sqrt{2})a = 1 \quad \therefore a = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}+1) \quad \cdots ⑥$$

が必要。以上から④.⑥が必要である。逆にこの時、$(\alpha, \beta) = (\frac{3}{4}\pi, \frac{4}{3}\pi)$ が $\triangle ABC$ の面積の最大値を与えることを示す。まず、$\triangle ABC$ の面積には必ず最大値が存在する…⑦

次に最大値を与える $\alpha.\beta$ は③.⑤と同等の式、

$$\begin{pmatrix} b\cos\beta - 1 \\ b\sin\beta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} = 0, \quad \begin{pmatrix} a\cos\alpha - 1 \\ a\sin\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\beta \\ \sin\beta \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} b\cos(\beta-\alpha) = \cos\alpha \\ \frac{\sqrt{2}}{2}b\cos(\beta-\alpha) = \cos\beta \end{cases} \quad \cdots ⑧$$

が成り立つ。$t = \cos\alpha$ とすると⑧から $\cos\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}t$, $\cos(\beta-\alpha) = \frac{1}{b}t$ だから.

$$\cos\beta\cos\alpha + \sin\beta\sin\alpha = \frac{1}{b}t$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}t^2 \pm \sqrt{1-t^2}\sqrt{1-\tfrac{1}{2}t^2} = \frac{1}{b}t$$

$$\pm\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-\tfrac{1}{2}t^2} = t\left(\frac{1}{b} - \frac{\sqrt{2}}{2}t\right)^2 \quad \cdots ⑨$$

2乗してセイリすると、

$$\left(t+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}-1)t^2 - 2t + \sqrt{2}\right\} = 0 \quad \cdots ⑩$$

$\sim\sim = 0$ の判別式 D として.

$$D/4 = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{2}(\sqrt{3}-1) = -\sqrt{3} < 0$$

だから、⑩の実解は $t = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ のみ、この時⑨で複号負が採用される。すなわち、

$$\sin\alpha\sin\beta < 0 \quad \cdots ⑪$$

以上から、⑧をみたす α は $t = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ つまり $\alpha = \frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi$ で、各々⑧.⑪から

$$(\alpha, \beta) = \left(\frac{3}{4}\pi, \frac{4}{3}\pi\right), \left(\frac{5}{4}\pi, \frac{2}{3}\pi\right)$$

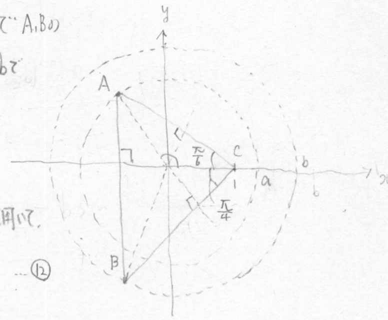
が最大値の候補。ところが対称性から、いずれも $\triangle ABC$ の面積が等しくなるから、

たしかに $(\alpha, \beta) = (\frac{3}{4}\pi, \frac{4}{3}\pi)$ で $\triangle ABC$ の面積は最大。以上から協(∵⑦)

よって、もとめる (a, b) は

$$(a, b) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}+1), \sqrt{3}+1\right) \quad /\!/$$

(2) 図形の概形は右図。ここで A, B の x 座標は各 $-\frac{\sqrt{2}}{2}a = -\frac{1}{2}b$, $-\frac{1}{2}b$ で等しいことから、



$$\overline{AB} = \frac{\sqrt{2}}{2}a + \frac{\sqrt{3}}{2}b$$

$$= \frac{\sqrt{3}+1}{2}b = \frac{1}{2}b^2$$

だから、$\triangle ABC$ に正弦定理を用いて、

$$\frac{\frac{1}{2}b^2}{\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)} = 2R \quad \cdots ⑫$$

ここで⑧から

$$\cos\frac{7}{12}\pi = -\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{b} \quad \therefore \cos\frac{5}{12}\pi = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{b}$$

より、

$$\sin\frac{5}{12}\pi = \sqrt{1 - \frac{1}{2}\frac{1}{b^2}} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{b}{2\sqrt{2}}$$

だから、⑫から

$$R = \frac{2\sqrt{2}\cdot b^2}{2\cdot 2b} = \frac{\sqrt{2}}{2}b = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}+1) \quad /\!/$$