第1問

[解] $f(x)=x^3+x^2+(a+b-a^2)x+ab$

(1) $f(x)=(x+a)(x^2+(1-a)x+b)$ ……ア

(2) $g(x)=x^2+(1-a)x+b$ とおく。$g(x)=0$ の判別式 D として.

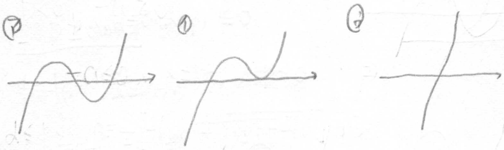
$$D=(1-a)^2-4b \quad \cdots ①$$

である。$D\geqq0$ の時 $g(x)=0$ は2実解 $\alpha, \beta\ (\alpha\leqq\beta)$ を持つ

又,

$$g(-a)=2a^2-a+b=2\left(a-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{8}+b$$

である。$y=f(x)$ のグラフの概形は下図



アの時

$D>0$ であり,題意の条件はこのもとで:

$$\max(-a, \alpha, \beta)\leqq0$$

$\alpha\leqq\beta$ 及び $\beta=\frac{1}{2}\left[-(1-a)+\sqrt{(1-a)^2-4b}\right]$ から.

$$-a\leqq0 \wedge -(1-a)+\sqrt{(1-a)^2-4b}\leqq0$$

$$a\geqq0 \wedge 1-a\geqq0 \wedge (1-a)^2-4b\leqq(1-a)^2$$

$$\therefore D>0\leqq a\leqq1 \wedge b\geqq0$$

イの時

$D=0$ 又は $g(-a)=0$ である.

$D=0$ の時 $g(x)=0$ の重解は $x=\frac{a-1}{2}$ で条件は

$$-a\leqq0 \qquad \therefore\ a\geqq0$$

$g(-a)=0$ の時 $g(x)=0$ のもう1つの解は $x=2a-1$ であって.

条件は

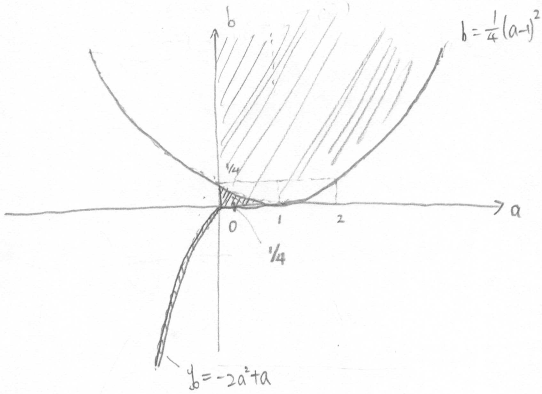
$$2a-1\leqq0 \qquad \therefore\ a\leqq\frac{1}{2}$$

($f(x)$ が3重解を持つときすなわち $-a=\frac{a-1}{2} \Leftrightarrow a=\frac{1}{3}$ のときも これでよい)

ウの時

$D<0$ であり条件は $-a\leqq0 \quad \therefore\ a\geqq0$

以上を図示して 右上図斜線部(境界含む)



第 2 問

[解] (1) $(m \geq 0, n \geq 1)$

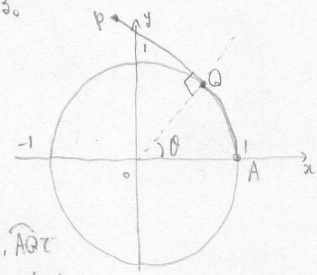
○ $a_{m+1,n} = \int_0^{\pi} \theta^{m+1} \cdot \cos n\theta \cdot d\theta = \frac{1}{n}\left[\theta^{m+1} \cdot \sin n\theta\right]_0^{\pi} - \frac{m+1}{n}\int_0^{\pi} \theta^m \sin n\theta \, d\theta$

$= -\frac{m+1}{n} b_{m,n}$ 答

○ $b_{m+1,n} = \int_0^{\pi} \theta^{m+1} \cdot \sin n\theta \cdot d\theta = -\frac{1}{n}\left[\theta^{m+1} \cos n\theta\right]_0^{\pi} + \frac{m+1}{n}\int_0^{\pi} \theta^m \cos n\theta \, d\theta$

$= (-1)^{n+1}\frac{\pi^{m+1}}{n} + \frac{m+1}{n} a_{m,n}$ 答

(2) 半径1の球面が $x^2+y^2+z^2=1$ となるように空間座標をおく。xy平面でひもがうごく領域をD,端点A(1.0.0)として、Dをx軸まわりに回転した立体の体積Vをもとめれば良い。対称性から$y \geq 0$にひもがあるとする。



1° $1 \leq x$の時

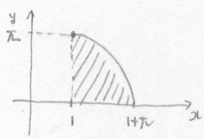
ひもの端点Pは、$(x-1)^2+y^2=\pi^2$上をうごく。

2° $x \leq 1$の時

ひもと球が、$Q(\cos\theta, \sin\theta, 0)$として、$\overset{\frown}{AQ}$で球上にあるとする。この時、糸をぴんとはった時、糸の残りの部分は円の接線になっている。この時、

$\overline{PQ} = \pi - \theta$で、その方向ベクトルは$\begin{pmatrix}\cos(\theta+\pi/2) \\ \sin(\theta+\pi/2)\end{pmatrix}$だから、

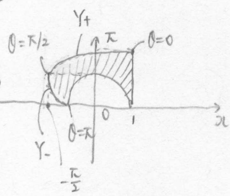
$\overrightarrow{QP} = (\pi-\theta)\begin{pmatrix}-\sin\theta \\ \cos\theta\end{pmatrix}$



である。よって、以下$C=\cos\theta$, $S=\sin\theta$として、

$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix}C \\ S\end{pmatrix} + (\pi-\theta)\begin{pmatrix}-S \\ C\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}X \\ Y\end{pmatrix}$ …①

である。

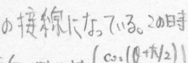


$\frac{dX}{d\theta} = -S - C(\pi-\theta) + S = -C(\pi-\theta)$ …②

だから、下表をうる。

θ	0		$\pi/2$		π
$\dot{X}$		−	0	+	
X		←		→	

これと、$Y \geq 0$, $\theta=0$で$(X, Y) = (1, 0)$, $\theta=\pi/2$で$(-\frac{\pi}{2}, 1)$, $\theta=\pi$で$(-1, 0)$だから、Pのキセキの概形は右上図。図のようにY_+, Y_-を定めると、求める体積Vとして、

$V + \frac{4}{3}\pi =$ 

$= \pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{1} Y_+^2 dx - \pi\int_{-\pi/2}^{-1} Y_-^2 dx + \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi\cdot\pi^3$

$= \pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} Y_+^2\frac{dX}{d\theta}d\theta - \pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} Y_-^2 dx + \frac{2}{3}\pi^4$

$= -\pi\int_0^{\pi} y^2\frac{dx}{d\theta}d\theta + \frac{2}{3}\pi^4$ …③

と表せる。ここで、$T = \int_0^{\pi} y^2\frac{dx}{d\theta}d\theta$とおくと、①.②から

$T = \int_0^{\pi}\{S + (\pi-\theta)C\}^2 \cdot (-C)\cdot(\pi-\theta)\cdot d\theta$

である。$t = \pi - \theta$とすると、

$T = \int_{\pi}^{0}\{S - tC\}^2 C \cdot t \cdot (-1) dt$ ($C = \cos t$, $S = \sin t$とした。)

$= \int_0^{\pi}(S - tC)^2 tC \, dt$

$= \int_0^{\pi}\{t^3 C^3 - 2t^2 SC^2 + tS^2 C\} dt$

$= \int_0^{\pi}\{t^3C^3 - 2t^2(S - S^3) + tC(1 - C^2)\} dt$

$= \int_0^{\pi}\{t^3\left(\frac{1}{4}\cos 3t + \frac{3}{4}C\right) - 2t^2\left(\frac{1}{4}S + \frac{1}{4}\sin 3t\right) + t\left(\frac{1}{4}C - \frac{1}{4}\cos 3t\right)\} dt$

$= \int_0^{\pi}\{\frac{1}{4}(t^3 - t)\cos 3t + \frac{1}{4}(3t^3 + t)C - \frac{1}{2}t^2 \cdot \sin 3t - \frac{1}{2}t^2 \cdot S\} dt$ …④

である。各項計算する。

○ $\int_0^{\pi}(t^3 - t)\cos 3t \, dt = \left[\frac{1}{3}(t^3 - t)\sin 3t + \frac{1}{9}(3t^2 - 1)\cos 3t - \frac{1}{27}\cdot 6t \cdot \sin 3t - \frac{6}{81}\cos 3t\right]_0^{\pi}$

$= \left[\frac{-1}{9}(3\pi^2 - 1) + \frac{1}{9} + \frac{12}{81}\right] = -\frac{1}{3}\pi^2 + \frac{10}{27}$

○ $\int_0^{\pi}(3t^3 + t)C \, dt = \left[+(3t^3 + t)S + (9t^2 + 1)C - (18t)\cdot S - 18\cdot C\right]_0^{\pi}$

$= \left[-(9\pi^2 + 1) - 1 + 36\right] = -9\pi^2 + 34$

○ $\int_0^{\pi} t^2 \sin 3t \, dt = \left[-\frac{1}{3}t^2\cos 3t + \frac{1}{9}\cdot 2t\sin 3t + \frac{2}{27}\cos 3t\right]_0^{\pi}$

$= \frac{1}{3}\pi^2 - \frac{4}{27}$

○ $\int_0^{\pi} t^2 \cdot S \, dt = \left[-t^2 \cdot C + 2tS + 2C\right]_0^{\pi} = \pi^2 - 4$

④に代入して

$T = \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\pi^2 + \frac{10}{27}\right) + \frac{1}{4}(-9\pi^2 + 34) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\pi^2 - \frac{4}{27}\right) - \frac{1}{2}(\pi^2 - 4)$

$= -3\pi^2 + 10 + \frac{2}{3}$

だから、③に代入して

$V = \frac{2}{3}\pi^4 + 3\pi^3 - \left(10 + \frac{2}{3} + \frac{4}{3}\right)\pi$

$= \pi\left(\frac{2}{3}\pi^3 + 3\pi^2 - 12\right)$ //