[解1] $I_n=\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^2 nx}{1+x}dx$ とおく.

$$I_n=\int_0^{\pi/2}\frac{1-\cos 2nx}{2(1+x)}dx \quad \cdots①$$

で

$$\int_0^{\pi/2}\frac{1}{2(1+x)}dx=\frac{1}{2}\Big[\log(x+1)\Big]_0^{\pi/2}=\frac{1}{2}\log(1+\pi/2) \quad \cdots②$$

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\cos 2nx}{2(1+x)}dx=\frac{1}{2n}\left[\frac{\sin 2nx}{2(x+1)}\right]_0^{\pi/2}-\frac{1}{2n}\int_0^{\pi/2}f(x)\cdot\sin 2nx\,dx \quad \left(f(x)=\frac{1}{2(1+x)}\right)$$

$$=-\frac{1}{2n}\int_0^{\pi/2}\sin 2nx\cdot f(x)\,dx \quad \cdots③$$

ここで.③において.区間内で $f(x)\geq 0$ だから.

$$\frac{1}{2n}\left|\int_0^{\pi/2}\sin 2nx\cdot f(x)\,dx\right|\leq\left|\frac{1}{2n}\int_0^{\pi/2}f(x)\,dx\right|\xrightarrow{n\to\infty}0$$

より.はさみうちから

$$\frac{1}{2n}\int_0^{\pi/2}\sin 2nx\, f(x)\,dx\longrightarrow 0 \quad \cdots④$$

したがって.①②③④から

$$I_n\longrightarrow\frac{1}{2}\log(1+\pi/2) \quad /\!/$$

[解2] $a_k=\int_{\frac{k-1}{2n}\pi}^{\frac{k}{2n}\pi}f(x)\cdot\sin^2 nx\,dx$ とおく。$\left[\frac{k-1}{2n}\pi,\ \frac{k}{2n}\pi\right]$ で $f(x)$ の max, min を与える x を各々 M_k, m_k とすると, $\sin^2 nx\geq 0$ から

$$f(m_k)\cdot\sin^2 nx\leq f(x)\sin^2 nx\leq f(M_k)\sin^2 nx$$

積分して

$$f(m_k)\int_{\frac{k-1}{2n}\pi}^{\frac{k}{2n}\pi}\sin^2 nx\,dx\leq a_k\leq f(M_k)\int_{\frac{k-1}{2n}\pi}^{\frac{k}{2n}\pi}\sin^2 nx\,dx \quad \cdots①$$

ここで

$$\int_{\frac{k-1}{2n}\pi}^{\frac{k}{2n}\pi}\sin^2 nx\,dx=\frac{1}{2}\left[x-\frac{1}{2n}\sin 2nx\right]_{\frac{k-1}{2n}\pi}^{\frac{k}{2n}\pi}=\frac{1}{2}\frac{\pi}{2n}$$

だから.①に代入して

$$\frac{\pi}{2}\frac{1}{2n}f(m_k)\leq a_k\leq\frac{\pi}{2}\frac{1}{2n}f(M_k)$$

kについて和をとって.

$$\frac{\pi}{2}\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}f(m_k)\leq I_n\leq\frac{\pi}{2}\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}f(M_k) \quad \cdots②$$

ここで.区分求積から $n\to\infty$ として

$$\begin{cases}\frac{\pi}{2n}\sum_{k=1}^{n}f(m_k)\longrightarrow\int_0^{\pi/2}f(x)\,dx=\log(1+\pi/2)\\ \frac{\pi}{2n}\sum_{k=1}^{n}f(M_k)\longrightarrow\log(1+\pi/2)\end{cases}$$

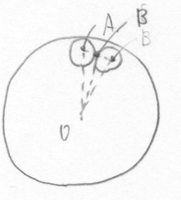
だから.②とはさみうちから

$$I_n\longrightarrow\frac{1}{2}\log(1+\pi/2) \quad /\!/$$

第２問

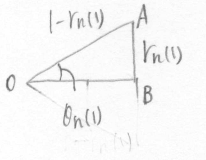
[解] k番目に描かれる円の半径を $r_n(k)$ とおく。まず初期条件から

$r_n(1)$ は、右図で ∠AOB（Aは円の中心、Bは接点）を $\theta_n(1)$ とおくと、$\theta_n(1)=\frac{\pi}{3n}$ だから



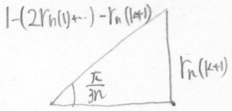
$$\sin\frac{\pi}{3n}=\frac{r_n(1)}{1-r_n(1)}$$

$$\therefore\ r_n(1)=\frac{\sin\frac{\pi}{3n}}{1+\sin\frac{\pi}{3n}} \quad \cdots ①$$



又、$r_n(k)$ と $r_n(k+1)$ についても同様にして、

$$\frac{r_n(k+1)}{1-2\sum_{p=1}^{k}r_n(p)-r_n(k+1)}=\sin\frac{\pi}{3n}$$



$$\frac{r_n(k+1)}{\sin\frac{\pi}{3n}}=1-2\sum_{p=1}^{k}r_n(p)-r_n(k+1)$$

kをk+1でおきかえて、辺々引く

$$\frac{r_n(k+1)-r_n(k+2)}{\sin\frac{\pi}{3n}}=r_n(k+1)+r_n(k+2)$$

$a_n=\sin\frac{\pi}{3n}$ とおくと

$$r_n(k+2)=\frac{1-a_n}{1+a_n}r_n(k+1) \quad \cdots ②$$

①、②から等比数列の公式より、

$$r_n(k)=\left(\frac{1-a_n}{1+a_n}\right)^{k-1}\cdot\frac{a_n}{1+a_n}$$

したがって、$A=\left(\frac{1-a_n}{1+a_n}\right)$ として $|A|<1$ から

$$S_n=\lim_{k\to\infty}\sum_{p=1}^{k}r_n^2(p)\cdot\pi\cdot 3n$$
$$=\pi\left(\frac{a_n}{1+a_n}\right)^2\cdot\frac{1}{1-A^2}\cdot 3n$$
$$=\frac{3}{4}n\cdot a_n\cdot\pi \quad \cdots ㋐$$

$$C_n=\lim_{k\to\infty}\sum_{p=1}^{k}2\pi\cdot r_n(p)\cdot 3n$$
$$=6n\pi\frac{a_n}{1+a_n}\frac{1}{1-\frac{1-a_n}{1+a_n}}$$
$$=3n\pi \quad \cdots ㋑$$

㋐、㋑から

(1) $S_2=\frac{3}{4}\pi$, $C_2=6\pi$ //

(2) $S_n=\frac{3}{4}n\cdot\sin\frac{\pi}{3n}\cdot\pi$ //

$C_n=3n\pi$ //

(3) $S_n=\frac{3n}{\pi}\cdot\frac{\pi}{4}\cdot\sin\frac{\pi}{3n}\cdot\pi$

$\longrightarrow \frac{\pi^2}{4}$ // （$n\to\infty$ で $\frac{\pi}{3n}\to 0$）