第 1 問

[解] $x_n = \frac{1}{n^b}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(n+k)^a} = \frac{1}{n^{a+b-1}}\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{(k/n)^a}\frac{1}{n}$ …①

ここで

$$\frac{1}{n^{a+b-1}} \xrightarrow{n\to\infty} \begin{cases} 0 & (a+b-1>0) \\ 1 & (a+b-1=0) \\ \infty & (a+b-1<0) \end{cases}$$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{(k/n)^a} \xrightarrow{n\to\infty} \int_1^2 \frac{1}{x^a}dx$$

$$= \begin{cases} \log 2 & (a=1) \\ \frac{1}{1-a}\left(2^{-a+1}-1\right) & (a\neq 1) \end{cases} \quad (\neq 0)$$

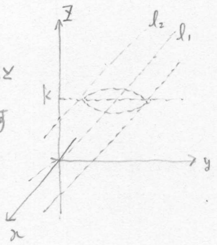
であるから、$a+b-1 \geqq 0$の時収束する

$$\begin{cases} a+b>1 \text{ の時 } x_n \longrightarrow 0 \quad (n\to\infty) \\ a+b=1 \land a=1 \text{ 〃 } x_n \to \log 2 \\ a+b=1 \land a\neq 1 \text{ 〃 } x_n \to \frac{2^{-a+1}-1}{-a+1} \end{cases}$$

//

第 2 問

[解] l_1：$y=z$，l_2：$y=z+\sqrt{2}$



まず、$z=k$ での C の切断面を求める。対称性から $0\leq k$ とする。l_1 と l_2 のキョリが 1 だから、C 上の点 $P(X, Y, Z)$ のみたす条件は、P と l_1 のキョリが 1 であることで、P から l_1 に下ろした垂足 H とすると、$\overrightarrow{OH}$ は $\overrightarrow{OP}$ の l_1 への正射影だから、$\vec{n}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ として

$$\overrightarrow{OH}=\frac{\overrightarrow{OH}\cdot\vec{n}}{|\vec{n}|^2}\vec{n} \quad \therefore\ \overline{OH}=\left|\frac{\overrightarrow{OH}\cdot\vec{n}}{|\vec{n}|}\right| \quad \cdots ①$$

である。したがって $\triangle OPH$ にピタゴラスの定理を用いて、①から

$$\overline{PH}^2=\overline{OP}^2-\overline{OH}^2=(X^2+Y^2+Z^2)-\frac{(Y+Z)^2}{2}$$

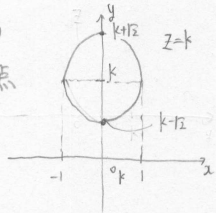
これが 1 に等しいので、

$$2(X^2+Y^2+Z^2)-(Y+Z)^2=2 \quad \cdots ②$$

これが C の方程式だから、$Z=k$ として

$$2X^2+Y^2-2kY+k^2-2=0$$

$$2X^2+(Y-k)^2=2 \quad \cdots ③$$



である。図示して右図。次に、C を z 軸まわりに回す。C の $z=k$ での切断面 C_k 上の点で、z 軸からのキョリが最大の点を A_k，B_k とおくと、この平面での R の面積 S_k は

$$S_k=\pi(A_k^2-B_k^2) \quad \cdots ④$$

で与えられる。$k\geq\sqrt{2}$ の時、図から明らかに $A_k(0, k+\sqrt{2}, k)$, $B_k(0, k-\sqrt{2}, k)$ である。以下 $k\leq\sqrt{2}$ の時をかんがえる。C_k 上の点 Q は、$Q(\cos\theta, \sqrt{2}\sin\theta+k)$ とおける。対称性から $-\pi\leq\theta\leq\pi$ とする。以下 $C=\cos\theta$, $S=\sin\theta$ として、

$$\overline{OQ}^2=C^2+2S^2+2\sqrt{2}kS+k^2=S^2+2\sqrt{2}kS+k^2+1$$
$$=(S+\sqrt{2}k)^2+1-k^2$$

$-1\leq S\leq 1$ だから、$\overline{OQ}^2$ の min は k によって以下のようになる。

$$\begin{cases} 0\leq k\leq\frac{\sqrt{2}}{2}\text{ の時。} & S=-\sqrt{2}k\text{ なる }\theta\text{ があって、}\min\overline{OQ}^2=1-k^2 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}\leq k\leq\sqrt{2}\text{ の時。} & S=-\sqrt{2}k\text{ なる }\theta\text{ がなく、}\min\overline{OQ}^2=(k-\sqrt{2})^2 \end{cases} \quad \cdots ⑤$$

一方、A_k は $A_k(0, k+\sqrt{2}, k)$ で一定なことは図から明らか。したがって、$z=k$ での R の方程式及び S_k は以下のようになる。($\because$ ④, ⑤)

$$R:\begin{cases} 0\leq k\leq\frac{\sqrt{2}}{2}\text{ の時。} & (1-k^2)\leq x^2+y^2\leq(k+\sqrt{2})^2 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}\leq k\text{ の時。} & (k-\sqrt{2})^2\leq x^2+y^2\leq(k+\sqrt{2})^2 \end{cases} \quad \cdots ⑥$$

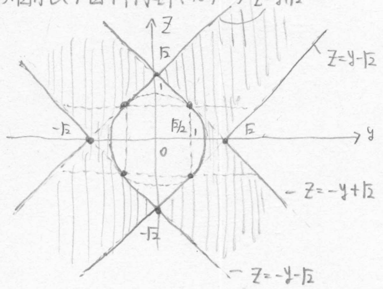
$$S_k=\begin{cases} \pi\{(k+\sqrt{2})^2+k^2-1\}=\pi(2k^2+2\sqrt{2}k+1) & (0\leq k\leq\frac{\sqrt{2}}{2}) \\ \pi\{(k+\sqrt{2})^2-(k-\sqrt{2})^2\}=4\sqrt{2}\pi k & (\frac{\sqrt{2}}{2}\leq k) \end{cases} \quad \cdots ⑦$$

(1) ③に $k=0$ を代入して、$2x^2+y^2=2$ //

(2) ⑥で、$x=0$ として R の yz 平面での断面は、

$$\begin{cases} (1-z^2)\leq y^2\leq(z+\sqrt{2})^2 & (0\leq z\leq\frac{\sqrt{2}}{2}) \\ (z-\sqrt{2})^2\leq y^2\leq(z+\sqrt{2})^2 & (\frac{\sqrt{2}}{2}\leq z) \end{cases}$$

だから、図示して下図斜線部(境界含む)



(3) 対称性から、求める体積 V として⑦から

$$\frac{1}{2}V=\int_0^{\sqrt{2}/2}\pi(2k^2+2\sqrt{2}k)dk+\int_{\sqrt{2}/2}^{2}4\sqrt{2}\pi k\,dk \quad \cdots ⑧$$

である。

$$\begin{cases} \int_0^{\sqrt{2}/2}(2k^2+2\sqrt{2}k+1)dk=\left[\frac{2}{3}k^3+\sqrt{2}k^2+k\right]_0^{\sqrt{2}/2}=\frac{7}{6}\sqrt{2} \\ \int_{\sqrt{2}/2}^{2}4\sqrt{2}k\,dk=2\sqrt{2}\left[k^2\right]_{\sqrt{2}/2}^{2}=7\sqrt{2} \end{cases}$$

を⑧に代入して

$$V=2\pi\left\{\frac{7}{6}\sqrt{2}+7\sqrt{2}\right\}=\frac{49}{3}\sqrt{2}\pi \ //$$