[解] まず. C_2のキセキをもとめる. 題意の直線の2端点, $P(\alpha, \alpha^2)$ $Q(\beta, \beta^2)$ $(\alpha<\beta)$とおく。

$\overline{PQ}>0$ より. $|PQ|=1 \Leftrightarrow |PQ|^2=1$ だから.

$$(\beta-\alpha)^2+(\beta^2-\alpha^2)^2=1$$

$$\therefore (\beta-\alpha)^2\{1+(\alpha+\beta)^2\}=1 \quad \cdots ①$$

ここで. $p=\alpha+\beta$. $q=\beta-\alpha$ とおく。$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ 及び $\alpha<\beta$ から.

$$q>0 \quad \cdots ②$$

となる. 題意の中点 $M(X, Y)$ とすると.

$$\begin{cases} X=\frac{1}{2}(\alpha+\beta)=\frac{1}{2}p \\ Y=\frac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2)=\frac{1}{4}\{(\alpha+\beta)^2+(\beta-\alpha)^2\}=\frac{1}{4}(p^2+q^2) \end{cases} \quad \cdots ③$$

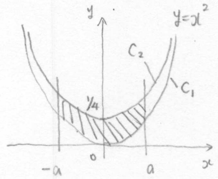
となることに注意する. さらに. ①を p, qで書き換えて.

$$q^2\{1+p^2\}=1 \qquad \therefore q^2=\frac{1}{1+p^2} \quad (\because 1+p^2 \neq 0)$$

でこれは②をみたす. ③に代入して. pをけすと、$(p=2X)$

$$Y=\frac{1}{4}\left\{(2X)^2+\frac{1}{1+(2X)^2}\right\}=\frac{1}{4}\left(4X^2+\frac{1}{1+4X^2}\right) \quad (X \in \mathbb{R}) \quad \cdots ④$$

これがC_2のキセキである。したがって. グラフの概形は右図で、斜線部の面積がS_aである。C_1, C_2の偶関数性から.



$$\frac{1}{2}S_a=\int_0^a\left\{x^2+\frac{1}{4}\frac{1}{1+4x^2}-x^2\right\}dx$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^a\frac{1}{1+4x^2}dx \quad \cdots ⑤$$

ここで. $x=\frac{1}{2}\tan\theta$ $(0 \leq \theta < \pi/2)$ とすると. $\frac{dx}{d\theta}=\frac{1}{2}\frac{1}{\cos^2\theta}$, 又. $a=\frac{1}{2}\tan\alpha$ …⑥ なるαがあるので、⑤を変形して.

$$\frac{1}{2}S_a=\frac{1}{4}\int_0^\alpha\frac{1}{1+\tan^2\theta}\frac{1}{2}\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\alpha$$

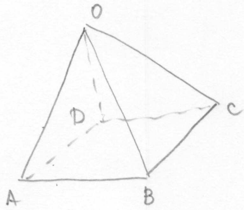
$$\therefore S_a=\frac{1}{4}\alpha \quad \cdots ⑦$$

⑥で $a \to +\infty$ とすると. $\alpha \to \pi/2$ だから. ⑦より

$$S_a \xrightarrow{a\to+\infty} \frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{8}$$ //

第 2 問

[解] 対称性から、X_nがAに一致するカクリツ q_n とおくと、X_nが B, C, D に一致するカクリツも q_n にひとしい。



X_nが O に一致するカクリツ p_n とおく。

$$p_n + 4q_n = 1 \quad \cdots ①$$

又、漸化式は

$$p_{n+1} = 4 \cdot \frac{1}{3} q_n$$
$$= \frac{1}{3}(1 - p_n) \quad (\because ①)$$

これと $p_1 = 0$ とから、

$$p_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\left(0 - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4}$$
$$= \frac{1}{4}\left\{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\} \quad //$$