第 1 問

［解］立方体の頂点A,B,C,D,E,F,G,Hとし題意の3面を ABCD, AEFB, AEHDとする。各球の中心は立方体及び球の対称性から、平面ACGE上の直線AG上にある。S_nの中心をO_nと書くことにすると、右図のO_0Tを2通りで表して

$$1=\left(r_0+2(r_1+\cdots+r_n)+r_{n+1}\right)\sqrt{\frac{1}{3}}+r_{n+1} \quad \cdots ①$$

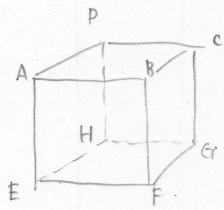
①で $n \to n-1$ としたものと辺々引いて、

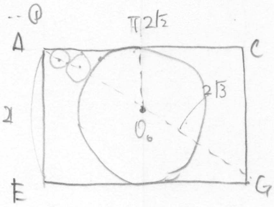
$$0=(2r_n+r_{n+1})\sqrt{\frac{1}{3}}+r_{n+1}$$
$$-r_n\sqrt{\frac{1}{3}}-r_n$$
$$=\left(\sqrt{\frac{1}{3}}-1\right)r_n+\left(1+\sqrt{\frac{1}{3}}\right)r_{n+1}$$

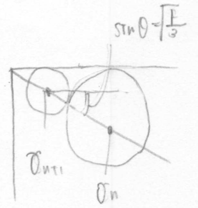
$$r_{n+1}=\frac{1-\sqrt{1/3}}{1+\sqrt{1/3}}\,r_n$$

$r_0=1$とあわせて、等比数列の公式から

$$r_n=\left(\frac{1-\sqrt{1/3}}{1+\sqrt{1/3}}\right)^n$$
$$=(2-\sqrt{3})^n \quad /\!/ (1)$$







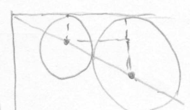
(2) CのうちS_k $(k=0,1,\cdots,n)$に含まれない部分の体積T_nとして

$$T_n=8-\frac{4}{3}\pi\sum_{k=0}^{n}r_k^3$$
$$=8-\frac{4}{3}\pi\sum_{k=0}^{n}(2-\sqrt{3})^{3n}$$
$$=8-\frac{4}{3}\pi\,\frac{1-(2-\sqrt{3})^{3n}}{1-(2-\sqrt{3})^3}$$

$|2-\sqrt{3}|<1$ だから、もとめる体積Tとして

$$T=\lim_{n\to\infty}T_n$$
$$=8-\frac{4}{3}\pi\,\frac{1}{1-(2-\sqrt{3})^3}$$
$$=8-\frac{6\sqrt{3}+10}{15}\pi \quad /\!/$$

★(1)は例の三角形でもOK



⇒これから出る。

[解]

(1) 1° $X=\pm a$ の時

$Y=\pm 1$ ならば良い。(複号任意)

2° $X \neq \pm a$ の時

接線が y 軸平行でないので、2接線 l_1, l_2 を、実数 m_1, m_2 を用いて、

$$l_k : y = m_k(x-X)+Y \qquad (k=1,2)$$

と表すことが出来る。$m_1 m_2 = -1$ となる条件をもとめる。ここで、座標 (x', y') を、

$$x' = \frac{x}{a},\ y' = y$$

によって定め、移動後の図形に「$'$」をつけて表す。この時、

$$\begin{cases} C' : x'^2 + y'^2 = 1 \\ l_k' : y = m_k(ax' - X) + Y \end{cases}$$

で、C', l_k' が接するので、l_k と C' の中心 $(0,0)$ の距離が1である。

$$\frac{|-m_k X + Y|}{\sqrt{(am_k)^2+1}} = 1$$

両辺正から2乗して、

$$a^2 m_k^2 + 1 = X^2 m_k^2 - 2XY m_k + Y^2$$

$$(a^2 - X^2) m_k^2 + 2XY m_k + 1 - Y^2 = 0 \qquad \cdots ①$$

①が m_1, m_2 で成立するので、m_1, m_2 は x の2次方程式

$$(a^2 - X^2)x^2 + 2XYx + 1 - Y^2 = 0 \qquad \cdots ②$$

の2解 ($X \neq \pm a$ から2次係数は0でない) である。判別式 D として

$$D/4 = (XY)^2 - (a^2 - X^2)(1 - Y^2)$$

$$= X^2 + a^2 Y^2 - a^2 > 0 \quad (\because P \text{ は } C \text{ の外部})$$

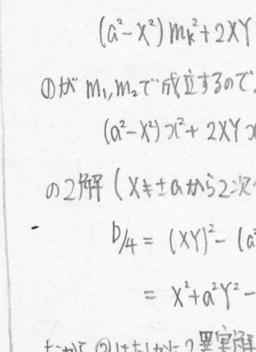
だから②はたしかに2異実解を持ち、

$$m_1 m_2 = \frac{1-Y^2}{a^2 - X^2} = -1 \qquad \therefore\ X^2 + Y^2 = a^2 + 1 \qquad \cdots ③$$

$X = \pm a$ の時も③をみたすことと、この時 P は C の外部にあることから

$$X^2 + Y^2 = a^2 + 1 \qquad (E \text{ とおく})$$

(2)



$$\begin{cases} E \text{ のうち } x \geq 0 \text{ の部分を } X_+,\ x \leq 0 \text{ の部分を } X_- \\ C \quad 〃 \qquad x_+ \qquad 〃 \qquad x_- \end{cases}$$

とする。方程式から

$$\begin{cases} X = \pm\sqrt{(a^2+1) - Y^2} \\ x = \pm a\sqrt{1 - y^2} \end{cases}$$

で、添字と複号が一致する。 $\cdots ④$

もとめる立体の体積 V として、対称性から

$$\frac{V}{2\pi} = \int_0^{\sqrt{a^2+1}} \{(X_- - 2a)^2 - (X_+ - 2a)^2\}\,dy$$

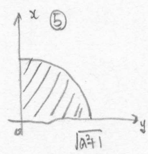
$$- \int_0^1 \{(x_- - 2a)^2 - (x_+ - 2a)^2\}\,dy$$

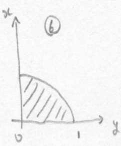
$$= \int_0^{\sqrt{a^2+1}} 4a(X_+ - X_-)\,dy - \int_0^1 4a(x_+ - x_-)\,dy \qquad (\because ④)$$

$$= 8a \underbrace{\int_0^{\sqrt{a^2+1}} \sqrt{(a^2+1) - y^2}\,dy}_{⑤} - 8a^2 \underbrace{\int_0^1 \sqrt{1-y^2}\,dy}_{⑥} \qquad \cdots ⑦$$

⑤,⑥は各々右の四分円の面積に相当し、

$$\begin{cases} ⑤ = \frac{\pi}{4}(a^2+1) \\ ⑥ = \frac{\pi}{4} \end{cases}$$





だから⑦に代入して

$$\frac{V}{2\pi} = 2\pi(a^2+1)a - 2\pi a^2$$

$$= 2\pi a(a^2 - a + 1)$$

$$\therefore\ V = 4\pi^2 a(a^2 - a + 1)$$

[注]

珍しくパップス・ギュルダンで検算がキク。重心 $(0,0)$ から、

$$V = 2\pi \cdot R \cdot S$$

$$= 2\pi \cdot 2a \cdot \pi\{(a^2+1) - a\}$$

$$= 4\pi^2 a(a^2 - a + 1) \quad \longrightarrow \text{一致}$$