第 1 問

[解] $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ … ①

$$F(x)=\begin{cases}(a+1)x^2+(c-ab)x & (x\geq b)\equiv g(x)\\(1-a)x^2+(c+ab)x & (x\leq b)\equiv t(x)\end{cases}$$ … ②

②から、$F(x)$は$x\neq b$で微分可能である。①から

$F'(x)=f(x)$ $(x\neq b)$ … ③

②とあわせて

$$f(x)=\begin{cases}2(a+1)x+(c-ab) & (x>b)\\2(1-a)x+(c+ab) & (x<b)\end{cases}$$

これが(i)より連続である。表式から$x\neq b$では連続であって

$f(x)\longrightarrow ab+2b+c$ $(x\to b+0)$

$f(x)\longrightarrow -ab+2b+c$ $(x\to b-0)$

左右極限がひとしく、したがって$ab=0$ … ④であり、この時

$f(b)=2b+c$

となる。④から$a=0$又は$b=0$。

1° $a=0$の時

②から$F(x)=x^2+cx$となる。(ii)から$c=-1$で、この時

③から、$f(x)=2x-1$となり、(iii)に反して矛盾。

2° $b=0$の時

②、③から

$$F(x)=\begin{cases}(a+1)x^2+cx & (0\leq x)\\(1-a)x^2+cx & (x\leq 0)\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}2(a+1)x+c & (0\leq x)\\2(1-a)x+c & (x\leq 0)\end{cases}$$

(ii)(iii)から

$$\begin{cases}a+1+c=0\\c=1\end{cases}\quad\therefore\ \begin{cases}a=-2\\c=1\end{cases}$$

以上から、もとめるのは $f(x)=\begin{cases}-2x+1 & (0\leq x)\\6x+1 & (x\leq 0)\end{cases}$ //

第 2 問

[解] $a_n=(2-\sqrt{3})^n$ とおく。二項係数が自然数であることから、A_n, B_n を自然数として

$$a_n=(2^n+{}_nC_2\cdot 2^{n-2}\cdot 3+\cdots)-\sqrt{3}({}_nC_1\cdot 2^{n-1}+{}_nC_3\cdot 2^{n-3}\cdot 3+\cdots)$$
$$=A_n-\sqrt{3}B_n$$

と表せる。a_{n+1} を2通りで表して、

$$A_{n+1}-\sqrt{3}B_{n+1}=(2-\sqrt{3})(A_n-\sqrt{3}B_n)$$
$$=2A_n+3B_n-\sqrt{3}(A_n+2B_n)$$

$$\therefore \begin{cases} A_{n+1}=2A_n+3B_n \\ B_{n+1}=A_n+2B_n \end{cases} \cdots ①$$

以下、「$A_n^2=3B_n^2+1$ … ② が任意の $n\in\mathbb{N}$ で成り立つこと」… ③ をM.I.で示す。$n=1$ の時の成立は明らかだから、$n=k\in\mathbb{N}$ での ② の成立を仮定し、$n=k+1$ での ② の成立を示す。①から

$$A_{k+1}^2=4A_k^2+9B_k^2+12A_kB_k$$
$$=3A_k^2+12B_k^2+1+12A_kB_k \quad (\because \text{カテイ})$$
$$3B_{k+1}^2+1=3(A_k^2+4B_k^2+4A_kB_k)+1$$
$$=3A_k^2+12B_k^2+1+12A_kB_k$$

から $n=k+1$ でも ② は成立。以上から ③ は示された。したがって

$m=A_n^2\in\mathbb{N}$、$m-1=3B_n^2$ とできて、$a_n=\sqrt{m}-\sqrt{m-1}$ と表せる ∎

[別]

$b_n=(2+\sqrt{3})^n=A_n+\sqrt{3}B_n$ と a_n を辺々かけて…

$$1=A_n^2-3B_n^2$$

より、

$$a_n=\sqrt{A_n^2}+\sqrt{3B_n^2}=\sqrt{m}+\sqrt{m-1} \quad ∎$$