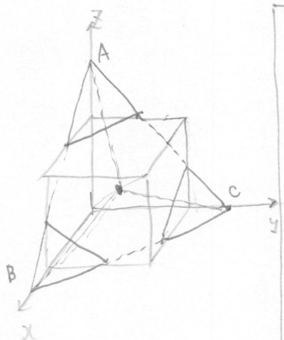
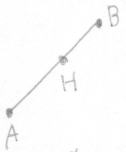
第 1 問

▷ この図がわかっていれば良い。あとは軸で切った時の切断面



軸上に点を取る時、ベクトルでとる。



$\overrightarrow{AH} = t\,\overrightarrow{AB}$ $(0 \leq t \leq 1)$

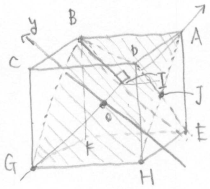
後で、積分する時、

$$V = \int_0^1 S(t) \cdot \underset{\sim\sim\sim\sim}{\overline{AB} \cdot dt}$$

とすること

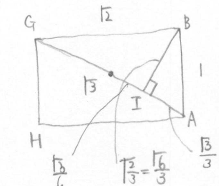
▷ ちょっとした別解を。AGをx軸、中心を原点とする。平面BDE⊥AGだから、

B, D, Eから下ろした垂足Iで等しい。



。D, Eはxy平面に対し対称で $D\left(\frac{\sqrt{3}}{6}, t, u\right)$ $E\left(\frac{\sqrt{3}}{6}, t, -u\right)$ とおける。

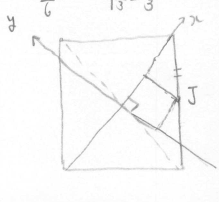
。$u = \frac{\sqrt{2}}{2}\ (= DJ)$, $t = \frac{\sqrt{3}}{6}$ から、D, Eが出て、対称性からCがわかる。



。$C\left(-\frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $D\left(\frac{\sqrt{3}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $B\left(\frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}, 0\right)$ だ。

$\overrightarrow{BC} \parallel \begin{pmatrix} 2\sqrt{3} \\ \sqrt{6} \\ -3\sqrt{2} \end{pmatrix}$ より、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/6 \\ \sqrt{6}/6 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2\sqrt{3} \\ \sqrt{6} \\ -3\sqrt{2} \end{pmatrix}$$



だから、$x = k$ との交点は $s = \frac{1}{12}(2\sqrt{3}k - 1)$ である

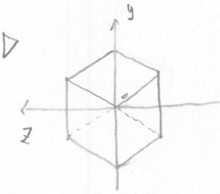
$\left(k, \frac{\sqrt{2}}{2}k + \frac{\sqrt{6}}{4}, -\frac{\sqrt{6}}{2}k + \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$ で、これをx軸のまわりに回すと、

半径 $\sqrt{2k^2 + 1/2}$ の円。

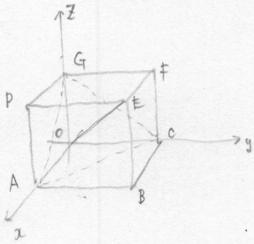
以上から

$$V = 2\left\{\int_0^{\sqrt{3}/6} \pi\left(2k^2 + \frac{1}{2}\right) dk + \frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2 \pi \times \frac{\sqrt{3}}{3}\right\} = \frac{\sqrt{3}}{3}\pi$$

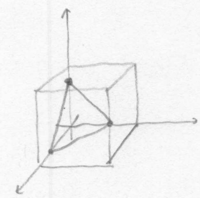
▷ x軸からみると、左のような正六角形に。



第 1 問



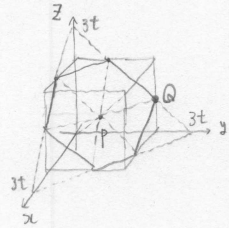
[解] 右のように立体の8頂点を定める。回転軸を OE とし、その方向ベクトル $\vec{l} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ に対し、OE 上の点 P を、$\overrightarrow{OP} = t\vec{l}$ $\left(0 \leq t \leq \frac{1}{2}\right)$ で定め、P を通り $\vec{l}$ に垂直な平面 $\pi(t)$ での立体の断面積を $S(t)$ とする。



1° $0 \leq t \leq \frac{1}{3}$

断面は3点 $(3t, 0, 0)$ $(0, 3t, 0)$ $(0, 0, 3t)$ を頂点とする正三角形（一辺 $3\sqrt{2}t$）で、これを $\vec{l}$ を軸に回して、

$$S(t) = \pi 6t^2 = 6\pi t^2 \quad \cdots ①$$



2° $\frac{1}{3} \leq t \leq \frac{1}{2}$

断面は右のような六角形となる。対称性から、

$$S(t) = \pi \overline{PQ}^2 \quad \cdots ②$$

であり、$Q(0, 1, 3t-1)$ から

$$\overline{PQ}^2 = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3t-1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} t \\ t \\ t \end{pmatrix} \right|^2 = t^2 + (t-1)^2 + (2t-1)^2$$

だから②に代入して、

$$S(t) = \pi(6t^2 - 6t + 2) \quad \cdots ②$$

①②及び立体の $t = 1/2$ を軸とする対称性から、

$$\frac{1}{2}V = \int_0^{1/2} S(t) \cdot \sqrt{3}\, dt$$

$$= \sqrt{3}\left[2\pi t^3\right]_0^{\frac{1}{3}} + \sqrt{3}\pi\left[2t^3 - 3t^2 + 2t\right]_{1/3}^{1/2}$$

$$= \sqrt{3}\pi\left\{\frac{2}{27} + \left(\frac{2}{8} - \frac{3}{4} + \frac{2}{2}\right) - \left(\frac{2}{27} - \frac{3}{9} + \frac{2}{3}\right)\right\}$$

$$= \sqrt{3}\pi \frac{1}{6}$$

$$V = \frac{\sqrt{3}}{3}\pi \quad /\!/$$