第1問

[解] $f(t)=\frac{t-x}{t+1}$ とおく．

$$F(x)=\begin{cases} \int_0^1 f(t)\,dt & (x\le 0)\\ -\int_0^x f(t)\,dt+\int_x^1 f(t)\,dt & (0\le x\le 1)\\ -\int_0^1 f(t)\,dt & (x\ge 1)\end{cases} \quad \cdots ①$$

である $\int_0^1 f(t)\,dt=\int_0^1\frac{t}{t+1}\,dt-x\int_0^1\frac{1}{t+1}\,dt$ だから $\int_0^1\frac{1}{t+1}\,dt>0$

とあわせて．$\int_0^1 f(t)\,dt$ は x の単調減少関数 だから①より．

$F(x)$ は $0\le x\le 1$ で最小値をとる．以下この場合を調べる．

$$F(x)=\int_x^0 f(t)\,dt+\int_x^1 f(t)\,dt$$

$$=G(0)+G(1)-2G(x) \quad \cdots ②$$

ただし．$G(t)$ は $f(t)$ の原始関数のうち積分定数を0とするもので

$$G(t)=\int\left(1-\frac{x+1}{t+1}\right)dt=t-(x+1)\log(t+1)$$

②に代入して

$$F(x)=1-(x+1)\log 2-2\left(x-(x+1)\log(x+1)\right)$$

$$=2(x+1)\log(x+1)-2x-(x+1)\log 2+1$$

$$F'(x)=2+2\log(x+1)-2-\log 2$$

$$=\log\frac{(x+1)^2}{2}$$

から下表を得る

x	0		$\sqrt{2}-1$		1
F'		$-$	0	$+$	
F		$\searrow$		$\nearrow$	

したがって．

$$\min F(x)=F(\sqrt{2}-1)=2\sqrt{2}\log\sqrt{2}-2(\sqrt{2}-1)-\sqrt{2}\log 2+1$$

$$=3-2\sqrt{2} \quad //$$

第 2 問

[解] $0<a<1$ …① ベクトル $\overrightarrow{A_nA_{n+1}}$ を表す複素数を α_n と表す.

又, $e(\theta) = c + is$ ($c=\cos\theta$, $s=\sin\theta$) とし, $p = e\left(\frac{2}{3}\pi\right)$ とおく. 題意から

$$\begin{cases} \alpha_{n+1} = a \cdot p\, \alpha_n \quad (n \in \mathbb{N}_{\geq 0}) \\ \alpha_0 = a \end{cases}$$

等比数列の公式から

$$\alpha_n = (ap)^n \cdot a$$

したがって, 点 A_n を表す複素数 t_n とおくと (複素平面上)

$$t_n = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_n = a\,\frac{1-(ap)^n}{1-ap}$$

① と $|p|=1$ から, $(ap)^n \to 0$ $(n\to\infty)$ だから

$$t_n \xrightarrow{n\to\infty} \frac{a}{1-ap}$$

$$= \frac{2a}{(2+a)^2+(\sqrt{3}a)^2}\left\{(2+a) + a\sqrt{3}\,i\right\}$$

$$= \frac{a}{2(a^2+a+1)}\left\{(2+a) + a\sqrt{3}\,i\right\}$$

したがって, もとめる座標は $a \in \mathbb{R}$ から

$$\left(\frac{a(2+a)}{2(a^2+a+1)},\ \frac{\sqrt{3}a^2}{2(a^2+a+1)}\right) \quad //$$