第 1 問

[解] (1) $a_n = 9^n$ //

(2) a_nのうち、1位が0のものをb_nコ, 1位が1であるものをc_nコとすると. 対称性から. 1位が2,3,…9であるものもc_nコずつあり. これらは排反だから

$$b_n + 9c_n = a_n \qquad \cdots ①$$

n+1ケタの正整数の下2ケタに注目して場合分けしてb_{n+1}を表すと.

$$b_{n+1} = 9c_n = a_n - b_n \qquad (\because ①)$$

両辺9^{n+1}でわって. $d_n = b_n/9^n$とすると

$$d_{n+1} = -\frac{1}{9}d_n + \frac{1}{9}$$

$$d_{n+1} - \frac{1}{10} = -\frac{1}{9}\left(d_n - \frac{1}{10}\right)$$

$b_1 = 0$から$d_1 = 0$だから. くり返し用いて

$$d_n = \left(-\frac{1}{9}\right)^{n-1}\left(-\frac{1}{10}\right) + \frac{1}{10}$$

$$\therefore b_n = \frac{9^n}{10}\left\{1 - \left(-\frac{1}{9}\right)^{n-1}\right\}$$

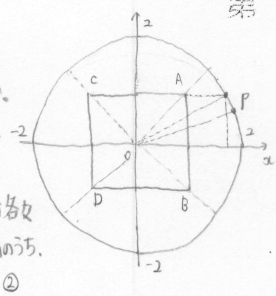
$$= \frac{9}{10}\left\{9^{n-1} - (-1)^{n-1}\right\}$$

だから.

$$\frac{b_n}{a_n} = \frac{1}{10}\left(1 + \left(\frac{-1}{9}\right)^n\right) \longrightarrow \frac{1}{10} \quad (n \to \infty)$$ //

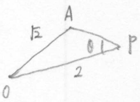
第 2 問

[解] $C=\cos\alpha$, $S=\sin\alpha$に対し、$P(2C, 2S)$とおく。
対称性から $0 \le \alpha \le \pi/4$ …① で調べれば良い。
OPと角θをなす半直線l, mとする。αによって、
$0 \le \alpha \le \pi/6$, $\pi/6 \le \alpha \le \pi/4$ で場合分けして考える。

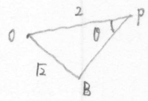


まず、$0 \le \alpha \le \pi/6$の時、θが最大となる時l, mは各々A, Bを通る。したがって、$\min\angle OPB$, $\min\angle OPA$のうち、大きくない方が最大のθを与える。 …②

$$\begin{cases} \overline{PB}^2 = (2C-1)^2+(2S+1)^2 = 6-4C+4S \\ \overline{PA}^2 = (2C-1)^2+(2S-1)^2 = 6-4(C+S) \end{cases} \quad \cdots *$$



だから、△OPA, △OPBに余弦定理を用いて、

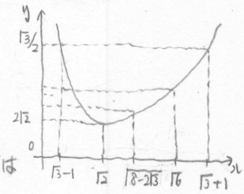


$$\cos\angle APO = \frac{2+\overline{PA}^2}{4\overline{PA}}$$
$$= \frac{1}{4}\left(\overline{PA}+\frac{2}{\overline{PA}}\right) \quad \cdots ③$$

$$\cos\angle BPO = \frac{1}{4}\left(\overline{PB}+\frac{2}{\overline{PB}}\right) \quad \cdots ④$$

である。$0 \le \angle APO, \angle BPO \le \pi/2$に注意する。$y=f(x)=x+\frac{2}{x}\ (0<x)$とすると、
$f'(x)=1-\frac{2}{x^2}$から、下表をうる。

x	0		$\sqrt{2}$	
f'		$-$	0	$+$
f		↘	$2\sqrt{3}$	↗



したがって、グラフは右上図のようになる。*より、$\overline{PA}^2$, $\overline{PB}^2$は
$0 \le \alpha \le \pi/6$の区間で、

$$\begin{cases} \overline{PA}^2 \cdots \text{単調減少で、2から } 2(2-\sqrt{3}) = (\sqrt{3}-1)^2 \text{ までうごく。} \\ \overline{PB}^2 \cdots \text{単調増加で、2から } 2(4-\sqrt{3}) \text{ までうごく。} \end{cases}$$

だから、③, ④及び$y=x+\frac{2}{x}$のグラフから、

$$\begin{cases} \cos\angle APO \text{は } \overline{PA}=\sqrt{3}-1 \text{ で max } \frac{\sqrt{3}}{2}\text{、この時}\angle APO=\pi/6 \\ \cos\angle BPO \text{は } \overline{PB}=\sqrt{2(4-\sqrt{3})} \text{ で max を与える。これは}\frac{\sqrt{3}}{2}\text{より小さい。} \end{cases}$$

となる。$\cos\theta$は$0 \le \theta \le \pi/6$で単調減少だから、②より、この区間でθのみたすべき条件は

$$0 \le \theta \le \pi/6 \quad \cdots ⑤$$

である。

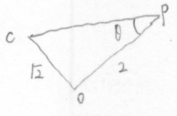
次に、$\frac{\pi}{6} \le \alpha \le \pi/4$の時を考える。この時は、$\theta$が最大となる時、$l, m$は各々C, Bを通る。
したがって、$\min\angle OPC$, $\min\angle OPB$のうちの大きくない方が$\max\theta$を与える。 …⑥

$0 \le \alpha \le \pi/6$の時の考察から、$\angle OPB$に関しては、$\alpha=\pi/4$の時に$\cos\angle OPB$は最大値を与え、この値は、$\overline{PB}^2=6$より

$$\max\cos\angle OPB = \frac{1}{4}\left(\sqrt{6}+\frac{2}{\sqrt{6}}\right) = \frac{\sqrt{6}}{3} < \frac{\sqrt{3}}{2}$$

だから、$\cos\theta$が$0 \le \theta \le \pi/2$では単調減少だから、$\min\angle OPB$は$\frac{\pi}{6}$より大きい …⑦

次に、$\angle OPC$について、



$$\begin{cases} \circ\ \overline{PC}^2 = (2C+1)+(2S-1)^2 = 6+4C-4S \\ \circ\ \cos\angle OPC = \frac{1}{4}\left(\overline{PC}+\frac{2}{\overline{PC}}\right) \end{cases}$$

だから、同様の考察により、
○ $\overline{PC}^2$は単調減少で、$(\sqrt{3}+1)^2$から、6までうごく
○ グラフとあわせて、$\cos\angle OPC$は$\overline{PA}=\sqrt{3}+1$で$\max\frac{\sqrt{3}}{2}$をとる。(つまり$\theta=\pi/6$)

だから、$\min\angle OPC=\pi/6$である …⑧

⑦, ⑧から、$\frac{\pi}{6} \le \alpha \le \pi/4$の時の$\theta$の条件は

$$0 \le \theta \le \pi/6 \quad \cdots ⑨$$

である。

以上⑤, ⑨から、もとめる$\max\theta=\pi/6$である。