第　問

[解] $f(x)=(x+1)(x-2)$, $g(x)=1+5x$ とおく. 題意から

$g(x)\in\mathbb{Z}$, $g(x)-\frac{1}{2}\le f(x)<g(x)+\frac{1}{2}$ …① をみたす $x\in\mathbb{R}$ を

もとめれば良い。$g(x)\in\mathbb{Z}$ から $5x\in\mathbb{Z}$, つまり $x=\frac{t}{5}$ $(t\in\mathbb{Z})$

とかける. 不等式に代入

$$1+t-\frac{1}{2}\le\left(\frac{t}{5}+1\right)\left(\frac{t}{5}-2\right)<1+t+\frac{1}{2}$$

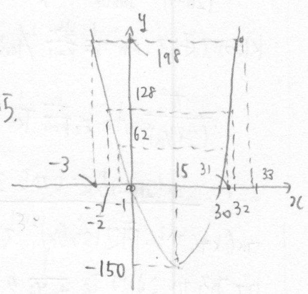
$$t+\frac{1}{2}\le\frac{1}{25}t^2-\frac{1}{5}t-2<t+\frac{3}{2}$$

$$\therefore\ 125\le 2t^2-60t<175. \quad \cdots②$$

$y=2x^2-60x$ のグラフから ②を

みたす $t\in\mathbb{Z}$ は $t=32,-2$ だから

$x=\frac{32}{5},-\frac{2}{5}$ //



第 2 問

[解] $n\in\mathbb{N}$ に拡張して良い。

(1) $n=1,2$ の時

$$P_1(x)=1,\ P_2(x)=1-2x,\quad Q_1(x)=1-2x,\ Q_2(x)=8x^2-8x+1 \quad \cdots (*)$$

とすれば良く成立する。そこで以下 $n=k, k+1\in\mathbb{N}$ での成立を仮定する。

$$\begin{cases} \sin(2k+4)\theta = 2\sin(2k+2)\theta\cos 2\theta - \sin 2k\theta \\ \qquad = \{2(1-2\sin^2\theta)(k+1)P_{k+1}(\sin^2\theta) - kP_k(\sin^2\theta)\}\sin(2\theta) \quad (\because 仮定) \\ \cos(2k+4)\theta = 2\cos(2k+2)\theta\cos 2\theta - \cos 2k\theta \\ \qquad = 2(1-2\sin^2\theta)Q_{k+1}(\sin^2\theta) - Q_k(\sin^2\theta) \quad (\because 仮定) \end{cases}$$

だから、

$$\begin{cases} P_{k+2}(x) = \dfrac{1}{k+2}\{2(1-2x)(k+1)P_{k+1}(x) - kP_k(x)\} \\ Q_{k+2}(x) = 2(1-2x)Q_{k+1}(x) - Q_k(x) \end{cases} \quad \cdots ①$$

とすれば $P_{k+2}(x)$, $Q_{k+2}(x)$ は $k+1$, $k+2$ 次式でかつ条件をみたす。以上から $n=k+2$ でも成立。よって示された。圏

(2) $0\leq\theta<2\pi$ とする。$\sin 2\theta=0 \Leftrightarrow \theta=0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi$ だから、これ以外の時、(1) から

$$P_n(\sin^2\theta) = \frac{\sin(2n\theta)}{n\sin 2\theta} \quad \cdots ②$$

だから、$P_n(\sin^2\theta)=0 \Leftrightarrow \theta = \frac{k\pi}{2n}$ ($k=1,2,\cdots,4n-1$, ただし $k\neq n, 2n, 3n$) となる。$x=\sin^2\theta$ とすると、$\sin^2\theta$ の周期性から

$$P_n(x)=0 \Leftrightarrow x=\sin^2\frac{k\pi}{2n} \quad (k=1,2,\cdots,n-1)$$

これら $n-1$ コの解は互いに異なり、さらに $P_n(x)$ は $n-1$ 次式だから、これが $P_n(x)=0$ の全ての解である。$A\neq 0$ として

$$P_n(x) = A\prod_{k=1}^{n-1}\left(x-\sin^2\frac{k\pi}{2n}\right) \quad \cdots ③$$

とおける。以下 A をもとめる。$P_n(x)$ の定数項を a_n とする。(*) 及び ① から、

$$\begin{cases} a_1=a_2=1 \\ a_{n+2} = \dfrac{1}{n+2}\{2(n+1)a_{n+1} - na_n\} \end{cases}$$

となり、帰納的に $a_n=1$ である。③ で係数比較して

$$A\prod_{k=1}^{n-1}\left(-\sin^2\frac{k\pi}{2n}\right) = 1 \qquad \therefore A = \frac{1}{\prod_{k=1}^{n-1}\left(-\sin^2\frac{k\pi}{2n}\right)}$$

だから、③ に代入して

$$P_n(x) = \prod_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{x}{\sin^2\frac{k\pi}{2n}}\right) = \prod_{k=1}^{n-1}(1-\alpha_k x) \quad \cdots ④$$

と表せる。圏

(3) $\sum_{k=1}^{n-1}\alpha_k$ は ④ より、$P_n(x)$ の x の項 b_n として、

$$\sum_{k=1}^{n-1}\alpha_k = -b_n \quad \cdots ⑤$$

と表せる。ここで b_n について、(*)、① から

$$\begin{cases} b_1=0,\ b_2=-2 \\ b_{n+2} = \dfrac{1}{n+2}\left[2(n+1)(b_{n+1}-2) - nb_n\right] \quad (\because a_n=1) \end{cases} \quad \cdots ⑥$$

となる。以下 $b_n=-\frac{2}{3}(n^2-1)$ となることを帰納的に示す。⑥ から、$n=1,2$ の時は成立。以下 $n=k, k+1$ での成立を仮定する。

$$b_{k+2} = \frac{1}{k+2}\left[2(k+1)\left(-\frac{2}{3}((k+1)^2-1)-2\right)+\frac{2}{3}(k^2-1)k\right]$$

$$= -\frac{2}{3}(k+1)(k+3)$$

$$= -\frac{2}{3}\{(k+2)^2-1\}$$

だから $n=k+2$ でも成立。以上から示された。これと ⑤ から、

$$\sum_{k=1}^{n-1}\alpha_k = \frac{2}{3}(n^2-1)$$

となる。圏