東大数学理科後期 2007 年度

1　問題 1

xy 平面の曲線 $C: xy^2 = 4$ 上に 1 点 $\mathrm{P}_0(x_0, y_0)\,(y_0 > 0)$ をとる．P_0 における C の接線と C との共有点のうち，P_0 と異なるものを $\mathrm{P}_1(x_1, y_1)$ とする．また，P_1 における C の接線と C との共有点のうち，P_1 と異なるものを $\mathrm{P}_2(x_2, y_2)$ とする．次の問に答えよ．

1. P_1，P_2 の座標を y_0 を用いてあらわせ．
2. $\triangle\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$ の面積を T とし，線分 $\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1$，$\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$ および曲線 C で囲まれた領域の面積を S とする．$\dfrac{T}{S}$ の値を求めよ．
3. $\angle\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$ が直角となるような y_0 の値を求めよ．
4. 全問 (3) で求めた y_0 に対し，$\triangle\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$ の外接円の面積を求めよ．

2　問題 2

次の問に答えよ．

1. 実数を成分とする行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $(a^2 + b^2 \neq 0)$ に対し

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}^{-1} \tag{1}$$

   とおく．行列 B は $B = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$ の形であることを示し，$r + t$，$rt - s^2$ を a，b，c を用いてあらわせ．

2. 前問 (1) において $r^2 + s^2 \geq a^2 + b^2$ が成り立つことを示せ．

3. 実数 a_n，b_n，$c_n\,(n=0,1,2\cdots)$ を次のように定める．

$$n=0\text{ のとき }\begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ b_0 & c_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

$$n \geq 1\text{ のとき }\begin{pmatrix} a_n & b_n \\ b_n & c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n-1} & b_{n-1} \\ -b_{n-1} & a_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} & b_{n-1} \\ b_{n-1} & c_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} & b_{n-1} \\ -b_{n-1} & a_{n-1} \end{pmatrix}^{-1} \tag{3}$$

ア $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ を示せ．
イ $\lim_{n\to\infty} a_n$，$\lim_{n\to\infty} c_n = 0$ を求めよ．

3　問題 3

N を 2 以上の自然数とする．$x_1 \leq \cdots \leq x_N$ をみたす実数 $x_1, \cdots, x_N$ に対し実数 k_n，p_n，$q_n\,(n=0,1,2,\cdots)$ を次の手続きで定める．

A $k_0=1$，$p_0=x_1$，$q_0=x_N$
B n が奇数のとき k_n は $x_i \leq \dfrac{p_{n-1}+q_{n-1}}{2}$ をみたす x_i の個数, $p_n=p_{n-1}, q_n=q_{n-1}$
C n が偶数 $(n \geq 2)$ のとき $k_n=k_{n-1}$，$p_n = \dfrac{1}{k_n}\sum_{i=1}^{k_n} x_i$，$q_n = \dfrac{1}{N-k_n}\sum_{i=k_n+1}^{N} x_i$.

ただし $k_n=0$ または $k_n=N$ となったら，その時点で手続きを終了する．$x_1 < x_N$ であるとき，次の問に答えよ．

1. すべての自然数 n について $1 \leq k_n \leq N-1$ かつ $x_1 \leq p_n < q_n \leq x_N$ が成り立つことを示せ．
2. 実数 $J_n\,(n=0,1,2,\cdots)$ を $J_n = \sum_{i=1}^{k_n}(x_i-p_n)^2 + \sum_{i=k_n+1}^{N}(x_i-q_n)^2$ と定めると，全ての自然数 n に対して $J_n \leq J_{n-1}$ が成り立つことを示せ．
3. n が十分大きいとき，$J_n=J_{n-1}$，$p_n=p_{n-1}$，$q_n=q_{n-1}$，$k_n=k_{n-1}$ が成り立つことを示せ．