東大数学理科後期 2006 年度

1　問題 1

xy 平面上で t を変数とする媒介変数表示

$$x = 2t + t^2 \tag{1}$$
$$y = t + t^2 \tag{2}$$

で表される曲線を C とする．次の問に答えよ．

1. $t \neq -1$ のとき，$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ を t の式であらわせ．
2. 曲線 C 上で $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\dfrac{1}{2}$ を満たす点 A の座標を求めよ．
3. 曲線 C 上の点 (x, y) を点 (X, Y) に移す移動が

$$X = \frac{1}{\sqrt{5}}(2x - y) \tag{3}$$
$$Y = \frac{1}{\sqrt{5}}(x + 2y) \tag{4}$$

　　で表されているとする．このとき Y を X を用いてあらわせ．

4. 曲線 C の概形を xy 平面上に描け．

2　問題 2

a を正の実数，θ を $0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$ を満たす実数とする．xyz 空間において，点 $(a, 0, 0)$ と点 $(a + \cos\theta, 0, \sin\theta)$ を結ぶ線分を，x 軸のまわりに 1 回転させてできる曲面を S とする．さらに，S を y 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を V とする．次の問に答えよ．

1. V を a と θ を用いてあらわせ．

2. $a=4$ とする．V を θ の関数と考えて，V の最大値を求めよ．

3　問題 3

数列の和の公式

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1), \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1), \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2 \tag{5}$$

などについて，次のような一般的な考察をしてみよう．p，n を自然数とする．

1. $p+1$ 次多項式 $S_p(x)$ があって，数列の和 $\sum_{k=1}^{n} k^p$ が $S_p(n)$ と表されることを示せ．
2. q を自然数とする．(1) の多項式 $S_1(x), S_3(x), \cdots, S_{2q-1}(x)$ に対して，
$$\sum_{j=1}^{q} a_j S_{2j-1}(x) = x^q(x+1)^q \tag{6}$$
が恒等式となるような定数 $a_1, \cdots, a_q$ を q を用いてあらわせ．
3. q を 2 以上の自然数とする．(1) の多項式 $S_2(x), S_4(x), \cdots, S_{2q-2}(x)$ に対して
$$\sum_{j=1}^{q-1} b_j S_{2j}(x) = x^{q-1}(x+1)^{q-1}(cx+q) \tag{7}$$
が恒等式となるような定数 c と $b_1, \cdots, b_{q-1}$ を q を用いてあらわせ．
4. p を 3 以上の奇数とする．このとき
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} S_p(x) = pS_{p-1}(x) \tag{8}$$
を示せ．