東大数学理科後期 2005 年度

1　問題 1

xy 平面の原点を O として，2 点 $\mathrm{P}(\cos\theta, \sin\theta)$，$\mathrm{Q}(1, 0)$ をとる．ただし，$0 < \theta < \pi$ とする．点 A は線分 PQ 上を，また点 B は線分 OQ 上を動き，線分 AB は $\triangle OPQ$ の面積を二等分しているとする．このような線分 AB で最も短いものの長さを l とおき，これを θ の関数と考えて $l^2 = f(\theta)$ と表す．

1. 線分 AQ の長さを a，BQ の長さを b とすると，$ab = \sin\dfrac{\theta}{2}$ が成立することを示せ．
2. $\mathrm{PQ} \geq \dfrac{1}{2}$，$\mathrm{PQ} < \dfrac{1}{2}$ それぞれの場合について，$f(\theta)$ を θ を用いてあらわせ．
3. 関数 $f(\theta)$ は $0 < \theta < \pi$ で微分可能であることを示し，そのグラフの概形を描け．また，$f(\theta)$ の最大値を求めよ．

2　問題 2

10 枚のカードに 1 から 10 までの数が 1 つづつ書かれている．これらのカードを用いた次のようなゲームを考える．r を自然数とする．このゲームは最大 r ラウンドからなり，第一ラウンドから始まる．各ラウンドで，プレーヤーは，10 枚のカードから 1 枚のカードを抜き出し，その数をみてから，「停止」または「続行」のいずれかを選択する．「停止」を選択した場合は，そのラウンドでゲームは終了し，最後に抜き出したカードに書かれた数が特典となる．「続行」を選択した場合は，抜き出したカードをもとに戻して，次のラウンドを実行する．最終ラウンドでは，「停止」しか選択できず，そのラウンドで抜きただしたカードに書かれた数が得点となる．ただし，各ラウンドで，どのカードも等しい確率 $\dfrac{1}{10}$ で抜き出されるものとする．

抜き出したカードに書かれた数 x によって「停止」または「続行」を選択する規則を，

そのラウンドにおける戦略という．戦略はラウンドごとに，0 または 1 の値をとる関数 $f(x)\,(x = 1, 2, \cdots, 10)$ によって，$f(x) = 0$ ならば「続行」，$f(x) = 1$ ならば「停止」と定める．

1. k は $1 \leq k < 10$ を満たす自然数とする．関数 $f_k(x)$ を
2. ラウンド数 r が 2 のとき，得点の期待値が最大となるような，第一ラウンドでの戦略を与え，その時の得点の期待値を求めよ．
3. ラウンド数 r が 3 のとき，特典の期待値が最大となるような，第一ラウンドおよび第二ラウンドでの戦略をそれぞれ与え，その時の得点の期待値を求めよ．

3　問題 3

a は実数で，$-\dfrac{1}{2} \leq a < 2$ を満たすとする．xy 平面の領域 D，E を

$$D1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$$
$$Ea \leq x \leq a + 1$$

で定める．領域 D と E の共通部分の面積を a の関数と考えて $S(a)$ とおく．

1. $S(a)$ を定積分であらわせ．
2. 導関数 $S'(a)$ を a の関数として求めよ．
3. $S(a)$ を最大にするような実数 a を解にもつ 4 次方程式 $3x^4+px^3+qx^2+rx+s=0$ (p,q,r,s は整数）を求めよ．
4. (3) で求めた方程式で，$x = \sqrt{2}t$ とおき，さらに $z = t - \dfrac{1}{t}$ とすることにより，この方程式を z についての 2 次方程式としてあらわせ．
5. $S(a)$ を最大にするような a の値を求めよ．