東大数学理科後期 2004 年度

1　問題 1

r は正の実数とし，角 θ は $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ を満たすとする．xy 平面の原点 O を P_0，$(1,0)$ を P_1 として，点 $\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3\cdots$ を以下の条件 (a)，(b)，(c) が $n = 0, 1, 2, \cdots$ に対して満たされるようにとる．

1. $\mathrm{P}_{n+1}\mathrm{P}_{n+2} = r\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$
2. $\triangle \mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}\mathrm{P}_{n+2} = \theta$
3. 点 $\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+2}\mathrm{P}_{n+3}$ は同一直線上にある．

このとき次の問に答えよ．

1. r を θ を用いてあらわせ．
2. 点 P_n の座標を (x_n, y_n) とする．複素数 $z_n = x_n + y_n i$ を θ を用いてあらわせ．
3. 数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ がともに収束するための必要十分条件は $\dfrac{\pi}{3} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ であることを証明せよ．

以下 $\dfrac{\pi}{3} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ とする．極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} y_n$ をそれぞれ θ の関数と考えて，$\alpha(\theta)$，$\beta(\theta)$ とおく．

1. 極限値 $\displaystyle\lim_{\theta\to\frac{\pi}{3}+0} \alpha(\theta)$，$\displaystyle\lim_{\theta\to\frac{\pi}{3}+0} \beta(\theta)$ をそれぞれ求めよ．
2. $\dfrac{\pi}{3} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ における $\beta(\theta)$ の最大値を求めよ．

2　問題 2

集合 A,B を $A=\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$，$B=\{0,1\}$ とし，N を 3 以上の整数とする．また，各項が 0 または 1 からなる数列を 01 数列と呼ぶことにする．01 数列 $a_1,a_2,\cdots.a_N$ に対し，A から B への写像 f を用いて，新しい 01 数列 $b_1,b_2,\cdots,b_N$ を，

$$b_1=f(a_1),b_2=f(2a_1+a_2),b_k=f(4a_{k-2}+2a_{k-1}+a_k)\,(k=3,4,\cdots,N)$$

と定め，b_1,b_2,$\cdots$,b_N は a_1,a_2,$\cdots$,a_N から f によって得られるという．ただし，A から B への写像 f とは，A の各要素 x にたいして B の要素 $f(x)$ をただひとつ対応させる規則をさすものとする．次の問に答えよ．

1. A から B への写像は，全部で何通りあるか．
2. $f(0)=f(3)=f(4)=f(7)=0$，$f(1)=f(2)=f(5)=f(6)=1$，であるとき，

   $$b_k=\frac{1}{2}\left\{1+(-1)^k\right\}\ (k=1,2,\cdots,N)$$

   となるような 01 数列 a_1，a_2，$\cdots$，a_N を求めよ．
3. A から B への写像 f が，条件

   $$(P)\ f(2m)\neq f(2m+1)\ (m=0,1,2,3)$$

   を満たすとする．このような f は何通りあるか．
4. A から B への写像 f が条件 (P) をみたすならば，どのような N 項からなる 01 数列も，ある 01 数列 a_1,a_2,$\cdots$,a_N から f によって得られることを示せ．

3　問題 3

xy 平面に点 $(-1,0)$ を中心とする半径 1 の円 A と，点 $(0,1)$ を中心とする半径 1 の円 B をとる．円 A の内部を D，円 B の内部を E とする．次の問に答えよ．

1. 点 $(-1+\cos\theta,\sin\theta)$ における円 A の接線を l とする．円 B の接線 m が l と直交するとき，l と m の交点 P の座標を θ を用いてあらわせ．
2. 領域 D にも E にも重ならないように 1 辺の長さが 2 の正方形を xy 平面内で動かすとき，この正方形が通り得ない部分の面積を求めよ．