東大数学理科後期 2003 年度

1　問題 1

1. $x \geq 0$ のとき，次の不等式を示せ．

$$x - \frac{x^3}{3!} \leq \sin x \leq x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

2. 曲線 $y = \sin x\,(0 \leq x \leq \pi)$ と x 軸で囲まれた図形を x 軸のまわりに一回転してできる立体を考える．この立体を x 軸に垂直な $2n-1$ 個の平面によって体積が等しい $2n$ 個の部分に分割する．ただし n は 2 以上の自然数である．
   (a) これら $2n-1$ 個の平面と x 軸との交点の x 座標のうち，$\frac{\pi}{2}$ より小さくかつ $\frac{\pi}{2}$ に最も近いものを a_n とする．このとき，$\lim_{n\to\infty} n(\frac{\pi}{2} - a_n)$ を求めよ．
   (b) $2n-1$ 個の平面と x 軸との交点の x 座標のうち最も小さいものを b_n とする．数列 $\{n^p b_n\}$ が $n \to \infty$ のとき 0 でない有限な値に収束するような実数 p の値を求めよ．また，p をそのようにとったとき，$\lim_{n\to\infty} n^p b_n$ を求めよ．

2　問題 2

p，q，N，M を自然数とする．ただし $\sqrt{p}$ は自然数ではないとする．このとき次の問に答えよ．

1. 自然数 I に対してある整数 A，B があって $(\sqrt{p} - [\sqrt{p}])^l = A\sqrt{p} + B$ と表せることを示せ．ただし $[\sqrt{p}]$ は $\sqrt{p}$ より小さい整数のうちで最大のものを表す．
2. xy 平面において，x 座標および y 座標がともに整数であるような点を格子点という．このとき，直線 $y = \sqrt{p}x$ との距離が $\frac{1}{N}$ 以下で x 座標が N 以上であるような格子点がそんざいすることを示せ．

3. 双曲線 $y^2 - px^2 = q$ の上の点 $mathrmP$ と格子点 Q で，線分 PQ の長さが $\dfrac{1}{M}$ 以下であるようなものが存在することを示せ．
4. $p = 5$，$q = 2$，$M = 100$ として (3) の条件を満たすような格子点 Q を一つ求めよ．すなわち，格子点 Q であって，双曲線 $y^2 - 5x^2 = 2$ の上の点 P を適当にとれば PQ の長さを $\dfrac{1}{100}$ いかにすることができるようなものを一つ求めよ．ただし $2.23606 < \sqrt{5} < 2.23607$ を用いてよい．

3 問題 3

1. 全ての n について $a_n \geq 2$ であるような数列 $\{a_n\}$ が与えられたとして数列 $\{x_n\}$ に関する漸化式

$$(A)\ x_{n+2} - a_{n+1}x_{n+1} + x_n = 0\,(n = 0, 1, 2, \cdots)$$

を考える．このとき，自然数 m を一つ決めて固定すれば，漸化式（A）を満たし，x_0，$x_m = 1$ であるような数列 $\{x_n\}$ がただ一つ存在することを示せ．また，この数列について $0 < x_n < 1\,(n = 1, 2, \cdots, m-1)$ が成り立つことを示せ．ただし m は 3 以上とする．

2. 数列 $\{a_n\}$ と正の定数 b が与えられ，すべての n について $a_n \geq 1 + b$ が成り立つと家庭して，数列 $\{y_n\}$ に関する漸化式

$$(B)\ y_{n+2} - a_{n+1}y_{n+1} + by_n = 0\,(n = 0, 1, 2, \cdots)$$

を考える．このとき，自然数 m を一つ決めて固定すれば，漸化式 (B) を満たし，$y_0 = 0$，$y_m = 1$ であるような数列 $\{y_n\}$ がただ一つ存在して $0 < y_n < 1\,(n = 1, 2, \cdots, m-1)$ が成り立つことを示せ．ただし m は 3 以上とする．

3. c を 2 より大きな定数として，全ての n について $a_n \geq e$ が成り立つと仮定する．このとき，c から決まる m によらない正の定数 r で $e < 1$ を満たすものが存在し，(1) で得られた数列 $\{x_n\}$ は $x_n < r^{m-n}\,(n = 1, 2, \cdots, m-1)$ を満たすことを示せ．