東大数学理科後期 2002 年度

1　問題 1

実数全体で定義された関数 $f(x) = xe^{-x^2}$ を考える。

1. $f(x)$ の増減・凹凸を調べ $f(x)$ のグラフの概形を図示せよ。
2. 正の数 C に対して $y = f(x)$ と x 軸、および $x = C$ で囲まれた領域を D_1 とする。D_1 を x 軸のまわりに回転させて得られる立体の体積を $V_1(C)$ とおくとき

$$\lim_{C\to\infty} V_1(C) \tag{1}$$

を求めよ。
3. $y = f(x)$ の $x \geq 0$ における最大値を M とするとき $y = f(x)$ と y 軸、および $y = M$ で囲まれた領域を D_2 とおく。D_2 を y 軸のまわりに回転させて得られる立体の体積 V_2 を求めよ。

2　問題 2

xyz 空間において次のような 3 つの互いに合同な長方形 L_1, L_2, L_3 を考える。

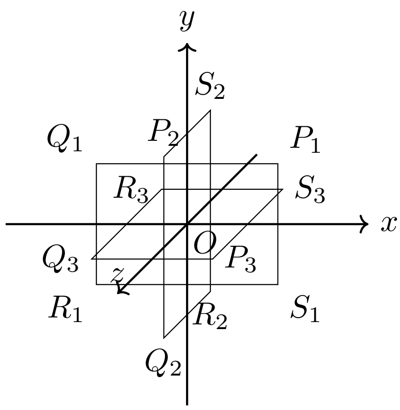
- L_1 は xy 平面に含まれ、$P_1(a, b, 0)$, $Q_1(-a, b, 0)$, $R_1(-a, -b, 0)$, $S_1(a, -b, 0)$ を頂点とする。
- L_2 は yz 平面に含まれ、$P_2(0, a, b)$, $Q_2(0, -a, b)$, $R_2(0, -a, -b)$, $S_2(0, a, -b)$ を頂点とする。
- L_3 は zx 平面に含まれ、$P_3(b, 0, a)$, $Q_3(b, 0, -a)$, $R_3(-b, 0, -a)$, $S_3(-b, 0, a)$ を頂点とする。

ここで $a > b > 0$ とする。このとき次の問に答えよ。

1. $\triangle P_1P_2P_3$ の面積、および $\triangle P_1P_2P_3$ と原点 O との距離を求めよ。
2. 四面体 $OP_1P_2P_3$ および四面体 $OP_1S_2P_3$ の体積をそれぞれ求めよ。
3. L_1, L_2, L_3 の 12 頂点から 3 点を選び三角形をつくる。このとき $\triangle P_1P_2P_3$ または $\triangle P_1P_2S_2$ と合同な三角形が 20 個えられる。これらの三角形で囲まれる立体を D とする。$0 < \theta < \dfrac{\pi}{4}$ なる θ に対して

$$a = \cos\theta, \quad b = \sin\theta$$

とおくとき D の体積 V を $t = \tan\theta$ の関数 $V(t)$ として表せ。
4. $0 < t < 1$ において $V(t)$ は最大値をとることを示し、そのときの t の値を求めよ。



3　問題 3

区間 $[0,1]$ において関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \left(x \leq \dfrac{1}{2}\right) \\ -2x+2 & \left(x > \dfrac{1}{2}\right) \end{cases} \tag{2}$$

とおく。$0 \leq a_1 \leq 1$ を満たす実数 a_1 を初期値として数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = f(a_{n-1}) \quad (n = 2, 3, \ldots) \tag{3}$$

で定める。このとき次の問に答えよ。

1. $f(b) = b$ を満たす，$0 \leq b \leq 1$ なる実数をすべて求めよ。
2. a_4 が (1) で求めたものの値の 1 つに等しくなるような初期値 a_1 をすべて求めよ。

3. 条件

「ある $n \geq 1$ に対して、a_n が (1) で求めたものの値の 1 つに等しくなる」

を満たす初期値 a_1 はどのような実数として表されるか。

4. 初期値 a_1 が (3) の条件を満たさないとき、$a_n = \dfrac{3}{4}$ となるような $n \geq 1$ が存在することを示せ。

5. 数列 $\{a_n\}$ が収束するために初期値 a_1 が満たすべき必要十分条件を求めよ。