東大数学理科後期 2001 年度

1　問題 1

任意の自然数 $n \geq 2$ に対して，常に不等式

$$n - \sum_{k=2}^{n} \frac{k}{\sqrt{k^2-1}} \geq \frac{i}{10} \tag{1}$$

が成立するような最大の整数 i を求めよ．

2　問題 2

1. 図 1 のように，等間隔 h で格子状に互いに直交する 2 組の無限の平行線が引いてある平面が与えられている．その上に半径 1 の円 C を無作為に落とすとき，この円 C がちょうど 2 本の線と交わる確率 p を求めよ．
2. 図 2 のように，半径 $\sqrt{2}+1$ の円が重複なく，かつ隣り合う円と接して無限に敷き詰められた平面がある．この上に半径 1 の円 C を無作為に落とすとき，その円 C が平面上のちょうど 3 つの円と交わる確率 q を求めよ．ただし，解答にあたり次のことを用いてよい．
   平面上に共に始点 O を始点とする一次独立な 2 つのベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ を考え，点 O と $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a}+\mathbf{b}$ の 3 つのベクトルの終点の 4 点を頂点とする平行四辺形を E とする．E の領域 F に対して，$\mathbf{f} \in F$ を $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ の整数係数の一時結合 $m\mathbf{a}+n\mathbf{b}$ によって平行移動したものの全体を D とする．即ち記号で書くと

$$D = \{\mathbf{x} + m\mathbf{a} + n\mathbf{b} \mid \mathbf{x} \in F, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}\} \tag{2}$$

とおく．ここで $\mathbb{Z}$ は整数全体の集合を表す．
このとき平面に 1 点を無作為に落とすとき，その点が D に落ちる確率は，平行四辺形 E の面積に対する領域 F の面積の比になっている．

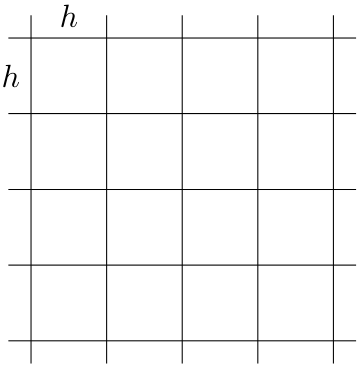

Figure1: 図 1

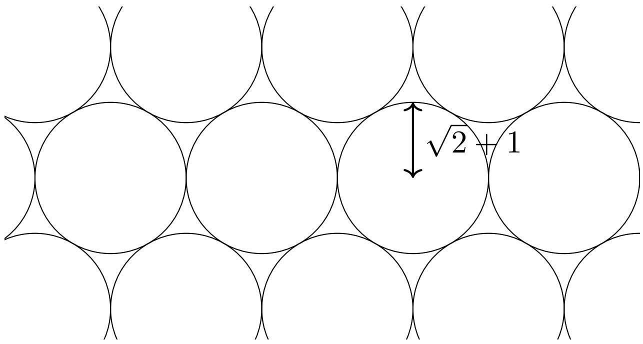

Figure2: 図 2

3　問題 3

整数を係数とする 2 次方程式 $f(x)$ で 2 次の項の係数が正であるものが与えられている．任意の正の実数 x に対して，平面の原点を中心とし半径が 1 である単位円 C 上の点 $P(x)$ を

$$P(x) = (\cos 2\pi f(x), \sin 2\pi f(x))$$

によって定める．円周 C の弧 I の長さが L $(0 < L < 2\pi)$ であるものを固定する．このとき各自然数 k に対して区間 $[k, k+1]$ の部分集合

$$\{x \mid k \leq x \leq k+1, P(x) \in I\}$$

は互いに交わらない有限個の閉区間の和集合になっているので，それらの区間の長さの総和を T_k で表す．このとき，$\lim_{k\to\infty} T_k = \frac{L}{2\pi}$ を証明せよ．