東大数学理科後期 2000 年度

1　問題 1

k を正整数とし, x を変数とする k 次多項式 $P_k(x)$ について次の条件

$$(C) \quad \begin{cases} P_k(x) - P_k(x-1) = x^{k-1} \\ P_k(0) = 0 \end{cases}$$

を考える. ただし, $x^0 = 1$ と定める. このとき, 次の問に答えよ.

1. $k = 1, 2$ に対し, $P_k(x)$ を求めよ.
2. すべての $k \geq 3$ に対し, 条件 (C) を満たす $P_k(x)$ が存在し, しかもただ一つであることを示せ.
3. 正整数 k に対し, k 次の多項式 $Q_k(x)$ を次の条件が成立するように定める.

$$\begin{cases} Q_k(0) = Q_k(1) = \cdots = Q_k(k-1) = 0 \\ Q_k(k) = 1 \end{cases}$$

このとき, k 個の整数 $c_1, c_2, \ldots, c_k$ がそれぞれただ一つ存在して,

$$P_k(x) = \sum_{j=1}^{k} c_j Q_j(x)$$

と表されることを示せ.

2　問題 2

正整数 l を与える. 各正整数 n に対して, 関数

$$y = x^l \sin nx, \quad 0 \leq x \leq 2\pi$$

のグラフと x 軸で囲まれる図形を C_n とする.

1. C_n を x 軸のまわりに回転させてできる回転体の体積を V_n とするとき, 極限値

$$\lim_{n \to \infty} V_n$$

を求めよ.

2. C_n を y 軸のまわりに回転させてできる回転体の体積を W_n とするとき, 極限値

$$\lim_{n \to \infty} W_n$$

を求めよ.

3　問題 3

背番号 1 から 5 までを順に付けた 5 人が, 何も置かれていないテーブルに向かっている. 最初 5 人は各自 3 枚のコインを持っている. それを背番号順に必ず 1 枚または 2 枚テーブルの上に置いてゆく. ただし, 手もとに 2 枚以上のコインがあるときに 1 枚だけコインを置く確率を p とし, p は人によらず一定とする.

背番号 5 の人が置き終わったところ (一巡目が終わったところ) で, 再び背番号 1 の人から順に手もとに残ったコインをテーブルに置いてゆく.

1. 一巡目が終わったとき, テーブルの上に 7 枚のコインが置かれている確率 Q を求めよ. また, その Q を最大にする p の値と, そのときの Q の値を求めよ.
2. 一巡目を終えるとき, 背番号 5 の人が, テーブルの上に 7 枚目のコインを置く確率 R を求めよ. また, その R を最大にする p の値を求めよ.
3. 二巡目が終わったときのテーブルの上のコインの数の期待値を求めよ.