東大数学理科後期 1999 年度

1　問題 1

1. n を正の整数とする．$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲において

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{\sin nx}{\sin x} & -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}, x \neq 0 \\ c_n & x = 0 \end{cases} \tag{1}$$

とおくことにより定義される関数 $f_n(x)$ が，$x = 0$ で連続となるように定数 c_n の値を定めよ．

2. $f_3(x)$ を $\cos x, \cos 2x$ 等を用いて表せることを示し，定積分

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f_3(x)dx \tag{2}$$

の値を求めよ．

3. 任意の正の整数 n に対して，定積分

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f_{2n+1}(x)dx \tag{3}$$

の値を求めよ．

2　問題 2

座標平面上の原点を $O(0,0)$ とする．また，x 座標および y 座標がともに整数であるような点を格子点という．

1. t を正の実数とする．点 $P(-1,0)$ を通り，傾きが t の直線と単位円 $x^2 + y^2 = 1$ との P 以外の交点を $Q(t)$ とする．$Q(t)$ の座標を求めよ．つぎに，$0 < s < t$ を満たす 2 つの実数 s, t に対し，線分 $Q(s)Q(t)$ の長さを求めよ．

2. $\angle Q(s)PO = \alpha, \angle Q(t)PO = \beta$ とし，

$$u = \tan\frac{\alpha}{2}, \quad v = \tan\frac{\beta}{2} \tag{4}$$

とおく．もし u, v がともに有理数ならば，線分 $Q(s)Q(t)$ の長さもまた有理数となることを示せ．

3. 任意に与えられた 3 以上の整数 n に対し，つぎの条件 (C1), (C2), (C3) をすべて満たす n 個の異なる点 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ が，座標平面上に存在することを証明せよ．

(C1) $A_1, A_2, \ldots, A_n$ はすべて格子点である．

(C2) $A_1, A_2, \ldots, A_n$ のどの異なる 3 点も一直線上にない．

(C3) $A_1, A_2, \ldots, A_n$ のどの異なる 2 点 A_i, A_j に対しても，線分 A_iA_j の長さは整数である．

3 問題 3

座標平面上にある 3 つの四角形 $ABCD$ と $A'B'C'D'$ が相似であるとは，対応する 4 つの頂点における内角がそれぞれ等しく，かつ対応する辺の長さの比がすべて等しいこととする．このとき，

$$\square ABCD \sim \square A'B'C'D' \tag{5}$$

と書く．ただし，四角形 $ABCD$ と書くときには，4 つの頂点 A, B, C, D は図のように反時計回りに並んでいるものとし，また四角形は周および内部を込めて考えるものとする．

四角形 $\mathrm{A_0B_0C_0D_0}$ が与えられたとき，この四角形から出発して，任意の整数 n に対して四角形 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n$ を以下のように帰納的に定める．

(I) $n = 0$ のときは，与えられた四角形 $\mathrm{A_0B_0C_0D_0}$ とする．

(II) $n > 0$ のときは，四角形 $\mathrm{A}_{n-1}\mathrm{B}_{n-1}\mathrm{C}_{n-1}\mathrm{D}_{n-1}$ まで定まったとして，四角形 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n$ を

$$\mathrm{A}_n = \mathrm{D}_{n-1}, \quad \mathrm{B}_n = \mathrm{C}_{n-1} \text{ かつ } \square\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n \sim \square\mathrm{B}_{n-1}\mathrm{C}_{n-1}\mathrm{D}_{n-1}\mathrm{A}_{n-1} \tag{6}$$

となる四角形として定める．

(III) $n < 0$ のときは，$0, -1, \ldots, n+1$ と負の向きに進んで，四角形 $\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{C}_{n+1}\mathrm{D}_{n+1}$ まで定まったとして，四角形 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n$ を

$$\mathrm{D}_n = \mathrm{A}_{n+1}, \quad \mathrm{C}_n = \mathrm{B}_{n+1} \text{ かつ } \square\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n \sim \square\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{C}_{n+1}\mathrm{D}_{n+1}\mathrm{A}_{n+1} \tag{7}$$

となる四角形として定める．

こうして定まった四角形 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n$ を K_n と書くことにする．
さて，座標平面上の 3 点

$$\mathrm{A}_0(2,1), \quad \mathrm{B}_0(8,4), \quad \mathrm{P}(4,12) \tag{8}$$

を与える．原点を O とし，線分 OP 上に原点以外の 1 点 C_0 をとる．点 A_0 から線分 $\mathrm{B}_0\mathrm{C}_0$ に平行に引いた直線と，線分 OP との交点を D_0 とする．このようにして定まる四角形 $\mathrm{A}_0\mathrm{B}_0\mathrm{C}_0\mathrm{D}_0$ から出発して，上記のようにして得られる四角形の系列

$$\ldots, K_{-2}, K_{-1}, K_0, K_1, K_2, \ldots \tag{9}$$

について考える．

1. $\angle \mathrm{D}_0\mathrm{DP}$ を求めよ．
2. 線分 OP 上のある点 C_0 を与え，それにより定まる四角形 $\mathrm{A}_0\mathrm{B}_0\mathrm{C}_0\mathrm{D}_0$ から出発して，四角形の系列 $\ldots, K_{-2}, K_{-1}, K_0, K_1, K_2, \ldots$ を作ったところ，ある 0 でない整数 n が存在して，$K_n = K_0$ となったという．このとき，点 C_0 の座標を求めよ．また，$K_n = K_0$ となる整数 n の値をすべて求めよ．
3. 線分 OP 上のある点 C_0 を与え，それにより定まる四角形 $\mathrm{A}_0\mathrm{B}_0\mathrm{C}_0\mathrm{D}_0$ から出発して，四角形の系列 $\ldots, K_{-2}, K_{-1}, K_0, K_1, K_2, \ldots$ を作ったところ，これらの四角形が座標平面において原点を除いた部分を，辺と頂点以外には互いに重なることなく，すき間なくおおったという．このような性質をもつ点 C_0 をすべて求め，それらの座標を記せ．またそれらの場合のおのおのについて，点 $(100, 50)$ が K_n に含まれるような整数 n の値をすべて求めよ．