東大数学理科後期 1998 年度

1　問題 1

xy 平面上の点 $P_1=(0,10)$ を中心とし半径が 1 の円 C_1 と, $P_2=(0,0)$ を中心とし半径が 2 の円 C_2 を与える. xy 平面上の 3 点 Q,R,S を頂点とし, 角 $\angle QRS$ が直角になるような直角二等辺三角形 $\triangle QRS$ に関して次の問いに答えよ.

(1) 点 Q が円 C_1 上を動き, 点 R が円 C_2 上を動くとき, 第 3 の頂点 S が動いた軌跡を求めよ.

(2) さらに, 直線 $x+2y=10$ の上にある点 P_3 を中心とする半径 $\sqrt{2}$ の円 C_3 を与える. 点 P_3 を適当にとったところ, 頂点 Q,R,S がそれぞれ円 C_1,C_2,C_3 上にあり, 角 $\angle QRS$ が直角になるような直角二等辺三角形 $\triangle QRS$ がただ一つだけ定まったという. このときの P_3 の座標を求めよ.

2　問題 2

2　パラメータ r,θ $(r>0, 0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{4})$ に対して x の関数

$$f(x)=r\sin(x+\theta)$$

を考える.

(1) r,θ が等式

$$\int_0^{2\pi}(\sin x-f(x))^2dx=\int_0^{2\pi}\sin^2 xdx \quad \cdots\cdots(E)$$

を満たしているとき, r を θ の関数として表せ.

(2) 式 (E) を満たしながら r,θ を動かしたとき, $0\leqq x\leqq\pi$ における $y=f(x)$ のグラフは xy 平面上を動く. これらのグラフが動く範囲 D を求め, 図示せよ.

(3) 図形 D の面積を求めよ.

3　問題 3

グラフ $G=(V,W)$ とは有限個の頂点の集合 $V=\{P_1,\ldots,P_n\}$ とそれらの間を結ぶ辺の集合 $W=\{E_1,\ldots,E_m\}$ からなる図形を指す．各辺 E_i は丁度 2 つの頂点 P_{i_1},P_{i_2} $(i_1\neq i_2)$ を持つ．頂点以外の辺の交わりは考えない．さらに，頂点には白か黒の色がついていると仮定する．

例えば，図 1 のグラフは頂点が $n=5$ 個，辺が $m=4$ 個あり，辺 E_i $(i=1,\ldots,4)$ の頂点は P_i と P_5 である．P_1,P_2 は白頂点であり，P_3,P_4,P_5 は黒頂点である．

出発点とするグラフ G_1 (図 2) は，$n=1,m=0$ であり，ただ 1 つの頂点は白頂点であるとする．

与えられたグラフ $G=(V,W)$ から新しいグラフ $G'=(V',W')$ を作る 2 種類の操作を以下で定義する．これらの操作では頂点と辺の数がそれぞれ 1 だけ増加する．

(操作 1) この操作は G の頂点 P_0 を 1 つ選ぶと定まる．V' は V に新しい頂点 P_{n+1} を加えたものとする．W' は W に新しい辺 E_{m+1} を加えたものとする．E_{m+1} の頂点は P_0 と P_{n+1} とし，G' のそれ以外の辺の頂点は G での対応する辺の頂点と同じとする．G において頂点 P_{i_0} の色が白又は黒ならば，G' における色はそれぞれ黒又は白に変化させる．また，P_{n+1} は白頂点とする (図 3)．

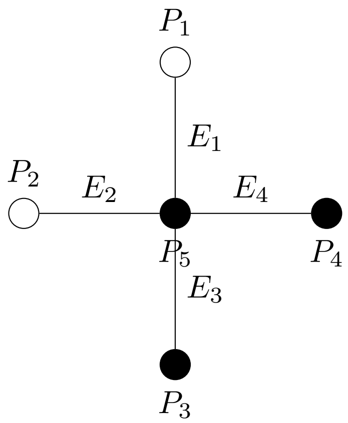
(操作 2) この操作は G の辺 E_{j_0} を 1 つ選ぶと定まる．V' は V に新しい頂点 P_{n+1} を加えたものとする．W' は W から E_{j_0} を取り去り，新しい辺 E_{m+1},E_{m+2} を加えたものとする．E_{j_0} の頂点が P_{i_1} と P_{i_2} であるとき，E_{m+1} の頂点は P_{i_1} と P_{n+1} であり，E_{m+2} の頂点は P_{i_2} と P_{n+1} であるとする．G' のそれ以外の辺の頂点は G での対応する辺の頂点と同じとする．G において頂点 P_{i_1} の色が白又は黒ならば，G' における色はそれぞれ黒又は白に変化させる．P_{i_2} についても同様に変化させる．それ以外の頂点の色は変化させない．また，P_{n+1} は白頂点とする (図 4)．

出発点のグラフ G_0 にこれら 2 種類の操作を有限回繰り返して得られるグラフを**可能グラフ**と呼ぶことにする．次の問いに答えよ．

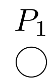
(1) 図 5 の 3 つのグラフはすべて可能グラフであることを示せ．ここで，すべての頂点の色は白である．

(2) n を自然数とするとき，n 個の頂点を持つ図 6 のような棒状グラフが可能グラフになるための n を満たす必要十分条件を求めよ．ここで，すべての頂点の色は白である．

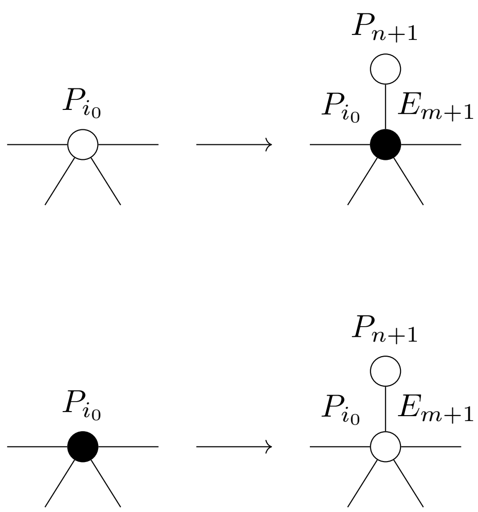
(a) 図 1



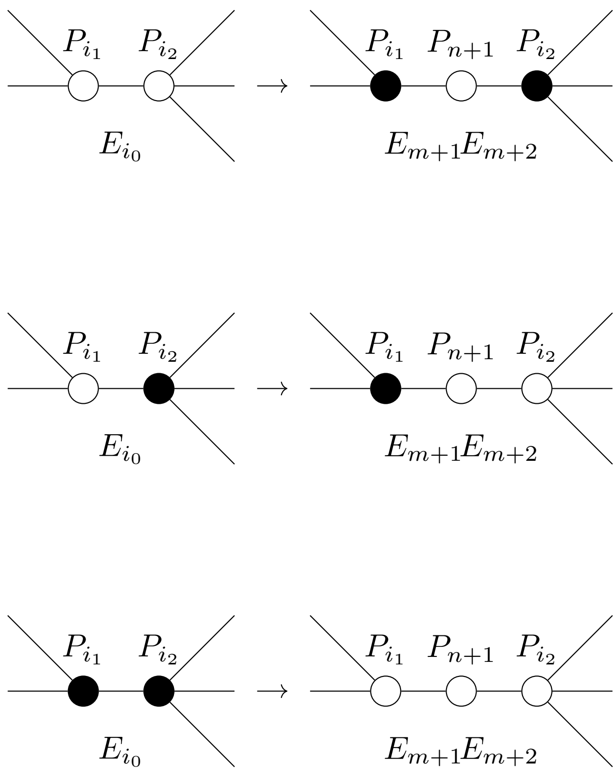
(b) 図 2



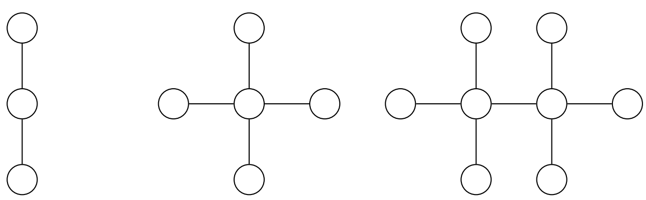
(c) 図 3



(d) 図 4



(e) 図 5



(f) 図 6