

東大数学理科後期 1993 年度

1 問題 1

n を 3 以上の自然数とする. xy 平面上, 原点を中心とし, 点 $(1, 0)$ をひとつの頂点に持つ正 n 角形を P とする.

1. P の像が P に完全に重なるような一次変換を表す行列を全て求めよ.
2. (1) で求めた行列すべての和を求めよ.

2 問題 2

xy 平面において, 直線 l と点 A の距離を $d(l, A)$ と書くことにする. さらに, 相異なる 3 点 $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$, $C = (x_3, y_3)$ が与えられたとき,

$$f(l) = d(l, A)^2 + d(l, B)^2 + d(l, C)^2$$

とおく.

1. ある与えられた直線に平行な直線のうち, $f(l)$ を最小にする直線 l_0 は三角形 ABC の重心を通ることを示せ.
2. 異なる 3 本の直線が $f(l)$ を最小にするならば, 三角形 ABC は生産各駅であることを示せ.

3 問題 3

放物線の一部 $y = x^2$, $0 \leq x \leq 2$ を y 軸のまわりに回転してできる回転体型の容器に水を満たし, このなかに, 半径 r の鉛の玉を, それが容器に使えて止まるまでゆっくり沈

めた。ただし、鉛直線を y 軸とする。このとき、次の問いに答えよ。

1. もとの水面に高さから球の中心の高さを引いた差 s を r の関数としてあらわせ。
2. あふれ出る水の体積を最大にする r の値を求めよ。