東大数学理科後期 1992 年度

1　問題 1

定数 a にたいして，曲線 $y=\sqrt{x^2-1}+\frac{a}{x}$ の $x \geq 1$ の部分を $C(a)$ とおく．

1. $C(a)$ が直線 $y=x$ の下部 $y<x$ に含まれるような実数 a の最大値 a_0 を求めよ．
2. $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ のとき，$C(a_0)$ と 3 直線 $y=x$，$x=1$，$x=\frac{1}{\cos\theta}$ によって囲まれる図形を x 軸のまわりに回転させてできる立体 V の体積 $V(\theta)$ をもとめよ．
3. $\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-0} V(\theta)$ をもとめよ．

2　問題 2

1. 空間内の直線 L を共通の境界線とし，角 θ で交わる 2 つの半平面 H_1，H_2 がある．H_1 上に点 A，L 上に点 B，H_2 上に点 C がそれぞれ固定されている．ただし，A，C は L 上にはないものとする．半平面 H_1 を，L を軸として，$0 \leq \theta \leq \pi$ の範囲で回転させる．このとき，θ が増加すると $\angle\mathrm{ABC}$ も増加することを証明せよ．
2. 空間内の相異なる 4 点 A，B，C，D について，不等式
$$\angle\mathrm{ABC}+\angle\mathrm{BCD}+\angle\mathrm{CDA}+\angle\mathrm{DAB} \leq 2\pi \tag{1}$$
が成り立つことを証明せよ．ただし，角の単位はラジアンを用いる．

3　問題 3

多項式の列 $P_0(x)=0$，$P_1(x)=1$，$P_2(x)=1+x$，$\cdots$，$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n-1} x^k$，$\cdots$ をかんがえる．

1. 正の整数 n，m に対して，$P_n(x)$ を $P_m(x)$ で割ったあまりは $P_0(x)$，$P_1(x)$，$\cdots$，$P_{m-1}(x)$ のいずれかであることを証明せよ．
2. 等式 $P_1(x)P_m(x^2)P_n(x^4) = P_{100}(x)$ が成立するような正の整数の組 (l, m, n) をすべて求めよ．