# 東大数学理科後期 1990 年度

## 1　問題 1

$xy$ 平面上の 4 点 $O(0,0)$，$A(2,0)$，$B(2,2)$，$C(0,2)$ を頂点とする正方形を $Q$ とする．このとき，次の条件を満たす $xy$ 平面上の点 $P$ の存在する範囲を図示し，その部分の面積を求めよ．

（条件）点 $P$ を通って，$Q$ の面積 4 を 1 と 3 に切り分けるような直線を引くことができない．

## 2　問題 2

$$A=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{とし}, P_0 \text{ を } xy \text{ 平面上の原点とする．}$$

$i=1,\ldots,6$ に対して，

$$\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} = A^i \begin{pmatrix} a_i \\ 0 \end{pmatrix}$$

とおいたとき，点 $P_i$ を $\overrightarrow{P_{i-1}P_i}=(x_i,y_i)$ となるように定める．ただし，このとき $P_6=P_0$ となっているものとする．$P_0,P_1,\ldots,P_6$ を順に結んで得られる六角形を $H$ とおく．

(1) $a_1-a_4=a_5-a_2=a_3-a_6$ であることを示せ．

(2) $\sum_{i=1}^{6} a_i=6,\quad a_1-a_4=1$ とするとき，$H$ の面積の最大値を求めよ．

(3) $\sum_{i=1}^{6} a_i=6$ とするとき，$H$ の面積の最大値を求めよ．

# 3　問題 3

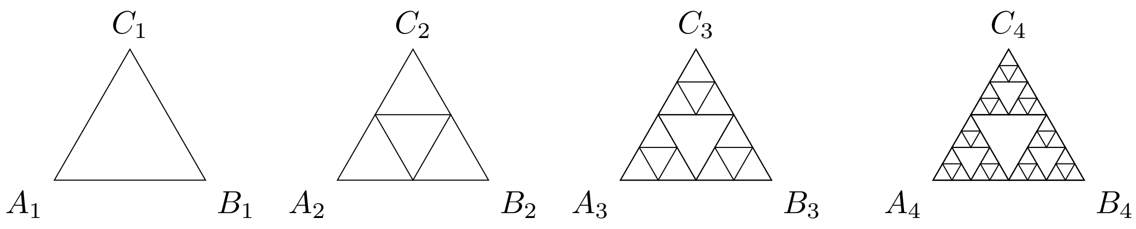
長さ 1 の線分をつなげてできる右のような平面上の図形 $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots$ を考える．$n = 1, 2, 3, \ldots$ に対し，図形 $Q_n$ の左端の点を $A_n$, 右端の点を $B_n$, 上端の点を $C_n$ とする．

$Q_1$ は一辺の長さが 1 の正三角形の周である．$Q_2$ は図のように，$Q_1$ を 3 つつなげてできる図形である．

$Q_n$ と同じ図形を 3 つ用意し，それらを $Q_n(1), Q_n(2), Q_n(3)$ とする．$i = 1, 2, 3$ に対し，$Q_n(i)$ の左端の点を $A_n(i)$, 右端の点を $B_n(i)$, 上端の点を $C_n(i)$ としたとき，$Q_{n+1}$ は，$B_n(1) = A_n(2)$, $C_n(2) = B_n(3)$, $A_n(3) = C_n(1)$ がそれぞれ同一の点になるようにおいてできる図形である．

$Q_n$ において，$A_n$ から線分の上を通り，一度通った点は二度通らずに $B_n$ まで行く行き方を考える．この行き方のうち，途中 $C_n$ を通らない場合の個数を $x_n$ とし，途中 $C_n$ を通る場合の個数を $y_n$ とする．容易にわかるように，$x_n - y_n = 1$ である．

1. $x_2$, $y_2$ を求めよ．
2. $x_{n+1}$ を $x_n$, $y_n$ を用いて表せ．また，$y_{n+1}$ を $x_n$, $y_n$ を用いて表せ．
3. $x_3$, $y_3$ を求めよ．




(a) 図形 $Q_1$　(b) 図形 $Q_2$　(c) 図形 $Q_3$　(d) 図形 $Q_4$