

# 東工大理系後期 2003 年度

July 1, 2025

## 1 問題 1

$xyz$  空間の 2 点  $P, Q$  を,  $\triangle OPQ$  ( $O$  は原点) の面積が正の一定値  $S$  となるように動かす.  $P, Q$  から  $xy$  平面に引いた垂線をそれぞれ  $P', Q'$  とし,  $\triangle OP'Q'$  の面積を  $S_1$  とする. ただし,  $O, P', Q'$  が同一線上にあるときは  $S_1 = 0$  とする. 同様に  $P, Q$  から  $yz$  平面,  $zx$  平面に垂線を引いて作った三角形の面積を  $S_2, S_3$  とする.

1.  $S^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2$  を証明せよ.
2.  $S_1 + S_2 + S_3$  の最大値, 最小値を求めよ.

## 2 問題 2

$m$  を 0 以上の整数とする. 直線  $2x + 3y = m$  上の点  $(x, y)$  で,  $x, y$  がともに 0 以上の整数であるものの個数を  $N(m)$  とする.

1.  $N(m + 6) = N(m) + 1$  を証明せよ.
2.  $N(m) = 1 - m + \left[ \frac{m}{2} \right] + \left[ \frac{2m}{3} \right]$  を証明せよ. ただし,  $[a]$  は  $a$  以下の最大の整数を表すものとする.