

京大数学理科後期 2006 年度

1 問題 1

1 次式 $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ に対して $\{A(x)\}^2 + \{B(x)\}^2 = \{C(x)\}^2$ が成り立つとする。このとき $A(x)$ と $B(x)$ はともに $C(x)$ の定数倍であることを示せ。

2 問題 2

a を実数として、行列 A を $A = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-a & a \end{pmatrix}$ と定める。 $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ とし、数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ を次の式で定める。

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}, n = 1, 2, \dots$$

このとき数列 $\{x_n\}$ が収束するための a の必要十分条件を求めよ。

3 問題 3

さいころを n 個同時に投げるとき、出た目の和が $n+3$ になる確率を求めよ。

4 問題 4

平面上の点 O を中心とし、半径 1 の円周上に相異なる 3 点 A , B , C がある。 $\triangle ABC$ の内接円の半径 r は $\frac{1}{2}$ 以下であることをしめせ。

5 問題 5

$H > 0$, $R > 0$ とする. 空間内において, 原点 O と点 $P(R, 0, H)$ を結ぶ線分を, z 軸のまわりに回転させてできる容器がある. この容器に水を満たし, 原点から水面までの高さが h のとき単位時間あたりの排水量が, \sqrt{h} になるように, 水を排出する. すなわち, 時刻 t までに排出された水の総量を $V(t)$ とおくと, $\frac{dV}{dt} = \sqrt{h}$ がなりたつ. このときすべての水を排出するのに要する時間をもとめよ.

6 問題 6

$\tan 1^\circ$ は有理数か.