

# 京大数学理科後期 2004 年度

## 1 問題 1

$x \geq 0$  に対して, 関数  $f(x)$  を次のように定義する.

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq 1 \text{ のとき} \\ 0 & x > 1 \text{ のとき} \end{cases}$$

このとき,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \int_0^1 f(4nx(1-x))dx$  を求めよ.

## 2 問題 2

複素数  $z$  の絶対値を  $|z|$  で表す.  $|(1+i)t + 1 + \alpha| \leq 1$  を満たす実数  $t$  が存在するような複素数  $\alpha$  の範囲を, 複素平面上で図示せよ. (ただし,  $i$  は虚数単位を表す.) (注意: 複素平面のことを複素数平面ともいう.)

## 3 問題 3

平面ベクトル  $\vec{x}$  に対して実数  $f(\vec{x})$  を対応させる写像  $f(\vec{x})$  が次の性質 (\*) を持っている.

(\*) 任意の平面ベクトル  $\vec{a}, \vec{b}$  に対して,  $f(\vec{a} + \vec{b}) = f(\vec{a}) + f(\vec{b})$  が成り立つ.

この時, 任意の平面ベクトル  $\vec{x}$  に対して,  $f\left(\frac{1}{3}\vec{x}\right) = \frac{1}{3}f(\vec{x})$  が成り立つことを証明せよ.

## 4 問題 4

水平面  $V$  上の 3 点を  $O, A, B$  とする.  $A$  は線分  $OB$  上にあり, 線分  $AB$  の長さは 1 メートルであるとする.  $O$  から,  $V$  と垂直に棒が立っている. 棒の先端  $X$  を  $A, B$  から見た時の仰角がそれぞれ  $45^\circ, 44^\circ$  であったという. 棒の長さは何メートルか. 小数点以下を四捨五入して答えよ.

ただし,  $0.01745 < \tan 1^\circ < 0.01746$  である.

## 5 問題 5

$n$  を自然数とする. 次の 3 つの不等式 (1), (2), (3) を全て満たす自然数の組  $(a, b, c, d)$  はいくつあるか.  $n$  を用いてあらわせ.

$$(1) 1 \leq a < d \leq n$$

$$(2) a \leq b < d$$

$$(3) a < c \leq d$$

## 6 問題 6

$n$  を自然数とする.  $xy$  平面内の, 原点を中心とする半径  $n$  の円の, 内部と周を合わせたものを  $C_n$  で表す. 次の条件 (\*) を満たす 1 辺の長さが 1 の正方形の数を  $N(n)$  とする.

(\*) 正方形の 4 頂点は全て  $C_n$  に含まれ, 4 頂点の  $x$  及び  $y$  座標は全て整数である.

この時,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N(n)}{n^2} = \pi$  を証明せよ.