京大数学理科後期 2001 年度

1　問題 1

方程式 $x^2+2y^2+2z^2-2xy-2xz+2yz-5=0$ を満たす正の整数の組 (x,y,z) を全て求めよ．

2　問題 2

正の整数 n に対し，多項式 $f_n(x)$ を，$n=1$ に対しては $f_1(x)=1$ とし，$n\geq 2$ の時は $f_n(x)=(1+x)f_{n-1}(x^2)$ で帰納的に定める．$g_n(x)=(1-x)f_n(x)$ とおくとき，$g_n(x)$ を求めよ．また，$n\to\infty$ のとき $f_n(x)$ が収束する実数 x の範囲を求めよ．

3　問題 3

複素数平面上の単位円に内接する正五角形で，1 がその頂点の 1 つとなっているものを考える．この正五角形の辺を延長してできる直線の交点のうち，元の正五角形の頂点以外のもので，実部，虚部がともに正であるものを z とする．

1. $\alpha=\cos\dfrac{2\pi}{5}+i\sin\dfrac{2\pi}{5}$ とするとき，α を用いて z をあらわせ．ただし，i は虚数単位を表す．
2. 3 点 1，α^2，z を通る円は，原点を通ることを示せ．

4　問題 4

負でない実数 a に対し，$0\leq r<1$ で，$a-r$ が整数となる実数 r を $\{a\}$ で表す．すなわち，$\{a\}$ は，a の小数部分を表す．

1. $\{n\log_{10}2\} < 0.02$ となる正の整数 n を一つ求めよ．
2. 10 進法による表示で 2^n の最高位の数字が 7 となる正の整数 n を 1 つ求めよ．ただし，$0.3010 < \log_{10}2 < 0.3011$，$0.8450 < \log_{10}7 < 0.8451$ である．

5　問題 5

行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 及び実数 a に対し，行列を用いて著された x，y に関する 2 つの連立一次方程式

(i) $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ 1-s \end{pmatrix}$

(ii) $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5-s \end{pmatrix}$

について，次の条件（*）を考える．

（*）方程式 (i) には解が存在して，方程式 (ii) には解が存在しない．

このとき，次の問に答えよ．

1. 条件（*）が成り立つとき，$\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ は，いずれも $\begin{pmatrix} s \\ 1-s \end{pmatrix}$ の実数倍であることを示せ．
2. 条件（*）を満たす 2 つの連立方程式を作ることができるための s の条件を求めよ．

6　問題 6

xy 平面上の単位円 C_1 と，条件 $-1 < a < -\dfrac{1}{2}$ を満たす実数 a に対し，点 $\mathrm{R}(a, 0)$ を考える．C_1 上の点 P における C_1 の接線と，R を通りこの接線と直交する直線との交点を Q とする．点 P が C_1 上を一周するときに，Q が描く曲線を C_2 とする．C_2 上の点の x 座標の最小値が -1 より小さいことを示し，C_2 で囲まれる図形の面積を求めよ．