京大数学理科後期 2000 年度

1　問題 1

α，β，γ は互いに相異なる複素数とする．

1. 複素数平面上で $\dfrac{z-\beta}{z-\alpha}$ の虚数部分が正となる z の存在する範囲を図示せよ．
2. 複素数 z が，$(z-\alpha)(z-\beta)+(z-\beta)(z-\gamma)+(z-\gamma)(z-\alpha)=0$ を満たしているとき，z は α，β，γ を頂点とする三角形の内部に存在することを示せ．ただし，α，β，γ は同一直線上にはないものとする．

2　問題 2

1. $x \geq 0$ のとき，不等式 $e^x \geq 1+\dfrac{1}{2}x^2$ が成立していることを示せ．
2. 自然数 n に対して関数 $f_n(x)=n^2(x-1)e^{-nx}$ の $x \geq 0$ における最大値を M_n とする．このとき $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ を求めよ，

3　問題 3

xy 平面上の点で x 座標，y 座標がともに整数である点を格子点という．a，k は整数で $a \geq 2$ とし，直線 $L: ax+(a^2+1)y=k$ を考える．

1. 直線 L 上の格子点を一つ求めよ．
2. $k=a(a^2+1)$ のとき，$x>0$，$y>0$ の領域に直線 L 上の格子点は存在しないことを示せ．
3. $k>a(a^2+1)$ ならば，$x>0$，$y>0$ の領域に直線 L 上の格子点が存在することを示せ．

4　問題 4

直方体 $\mathrm{ABCD}-\mathrm{A'B'C'D'}$ において，四角形 ABCD と四角形 $\mathrm{A'B'C'D'}$ は向かい合った 1 組の面であり，$\mathrm{AA'}$，$\mathrm{BB'}$，$\mathrm{CC'}$，$\mathrm{DD'}$ はこの直方体の辺である．ここで $\mathrm{AA'}=1$，$\mathrm{AB}=1$，$\mathrm{AD}=\sqrt{2}$ とする．この直方体の内部を通る線分 $\mathrm{AC'}$ 上に点 P をとり，P を通り $\mathrm{AC'}$ に垂直な平面による直方体の切り口を考える．

1. P が線分 $\mathrm{AC'}$ の中点であるとき，切り口は点 $\mathrm{B'}$，D を通ることを示せ．
2. $\mathrm{AP}=x$ であるとき，切り口の面積 $S(x)$ を求めよ．

5　問題 5

0 と相異なる複素数 α に対して数列 $\{a_n\}$ を $a_n=\alpha^n+\alpha^{-n}$ で定める．全ての数 n について $|a_n|<2$ が成立しているとする．

1. $|\alpha|=1$ が成立することを示せ．
2. $|a_m|>1$ となる自然数 m が存在することを示せ．

6　問題 6

関数 $f(x)$ を $f(x)=\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t$ で定める．

1. $y=f(x)$ の $x=1$ における法線の方程式を求めよ．
2. (1) で求めた法線と x 軸及び $y=f(x)$ のグラフによって囲まれる図形の面積を求めよ．