京大数学理科後期 1999 年度

1　問題 1

座標平面上で原点を通る直線と $y = x|x+2|$ のグラフが相異なる 3 点で交わっている．このグラフとこの直線によって囲まれる図形で，この直線より下側にあるものの面積を S_1，上側にあるものの面積を S_2 とする．$S_1 : S_2 = 9 : 8$ になるとき，この直線の傾きを求めよ，

2　問題 2

α，β，γ は $\alpha > 0$，$\beta > 0$，$\gamma > 0$，$\alpha + \beta + \gamma = \pi$ を満たすものとする．このとき，$\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$ の最大値を求めよ．

3　問題 3

α を正の定数として，数列 a_n，$b_n (n \geq 1)$ を次の式で定める．

$$\begin{aligned} 2a_{n+1} &= \alpha\left(3a_n^2 + 2a_nb_n - b_n^2 - a_n + b_n\right) \\ 2b_{n+1} &= \alpha\left(-a_n^2 - 2a_nb_n - b_n^2 - a_n + b_n\right) \\ a_1 &= b_1 = 1 \end{aligned}$$

1. a_2，b_2，a_3，b_3，a_4，b_4 を求めよ．
2. $\dfrac{a_{2n+1}}{a_{2n}}$ を求めよ．

4 問題 4

$\triangle$ABC は鋭角三角形とする．このとき，各面全てが $\triangle$ABC と合同な四面体が存在することを示せ．

5 問題 5

a，b を整数，u，v を有理数とする．$u+v\sqrt{3}$ が $x^2+ax+b=0$ の解であるならば，u と v は共に整数であることを示せ．ただし $\sqrt{3}$ が無理数であることは使って良い．

6 問題 6

1. $f(x)$ は $a \leq x \leq b$ で連続な関数とする．このとき

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(c)a \leq c \leq b$$

   となる c が存在することを示せ．

2. $y=\sin x$ の $0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$ の部分と $y=1$ 及び y 軸が囲む図形を，y 軸の周りに回転して得られる立体を考える．この立体を y 軸に垂直な $n-1$ 個の平面によって各部分の体積が等しくなるように n 個に分割するとき，$y=1$ に最も近い平面の y 座標を y_n とする．このとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\left(1-y_n\right)$ を求めよ．