京大数学理科後期 1998 年度

1　問題 1

2 次の正方行列 X と Y は $XY = YX$ のとき交換可能であるという．2 次の正方行列 A と B は交換可能ではないが，A と AB は交換可能であり A と BA も交換可能であるとする．このとき

1. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とするとき，$ad - bc = 0$ を示せ．
2. O を零行列とするとき，$A^2 = 0$ であることを示せ．

2　問題 2

関数 $f_n(x)$，$(n = 1, 2, 3, \cdots)$ は $f_1(x) = 4x^2 + 1$，

$$f_n(x) = \int_0^1 \left(3x^2 t f'_{n-1}(t) + 3f_{n-1}(t)\right) \mathrm{d}t, (n = 2, 3, 4, \cdots)$$

で帰納的に定義されている．この $f_n(x)$ を求めよ．

3　問題 3

A_1，A_2，A_3 は xy 平面上の点で同一直線上にはないとする．3 つの一次式

$$f_1(x, y) = a_1x + b_1y + c_1, f_2(x, y) = a_2x + b_2y + c_2, f_3(x, y) = a_3x + b_3y + c_3$$

は方程式 $f_1(x, y) = 0$，$f_2(x, y) = 0$，$f_3(x, y) = 0$ によりそれぞれ直線 $\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3$，$\mathrm{A}_3\mathrm{A}_1$，$\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2$ を表すとする．このとき実数 u，v をうまくとると方程式

$$uf_1(x, y)f_2(x, y) + vf_2(x, y)f_3(x, y) + f_3(x, y)f_1(x, y) = 0$$

が 3 点 A_1，A_2，A_3 を通る円を表すようにできることを示せ．

4　問題 4

a は $0 < a < \pi$ を満たす定数とする．$n = 0, 1, 2, \cdots$ に対し，$n\pi < x, (n+1)\pi$ の範囲に $\sin(x + a) = x \sin x$ を満たす x がただ一つ存在するので，この値を x_n とする．

1. 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (x_n - n\pi)$ を求めよ．
2. 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n(x_n - n\pi)$ を求めよ．

5　問題 5

xy 平面上に $2n$ 個の点 $\mathrm{A}_i(i, 1)$，$\mathrm{B}_i(i, 1)(i = 1, 2, \cdots, n)$ がある．上下に隣り合う 2 点 A_i，B_i を結ぶ線分を「縦辺」$(i = 1, 2, \cdots, n)$，左右に隣り合う 2 点 A_i，A_{i+1} および B_i，B_{i+1} を結ぶ線分を「横辺」$(i = 1, 2, \cdots, n-1)$ と言う．全ての横辺には，各辺独立に，確率 p で右向きの矢印が，確率 $1 - p$ で $\times$ 印が描かれている．また全ての縦辺には常に上向きの矢印が描かれている．このとき点 $\mathrm{A}_1(1, 1)$ から出発して，矢印の描かれている辺だけを通り，矢印の方向に進んで，点 $\mathrm{B}_n(n, 2)$ に到達する経路が少なくとも 1 本存在する確率を Q_n とする．以下の問に答えよ．

1. Q_2，Q_3 を求めよ．
2. Q_n を求めよ．

6　問題 6

自然数 n にたいし，$I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \cos^n 2\theta \sin^3 \theta d\theta$ とする．

1. I_2 の値を求めよ．
2. xy 平面上で原点 O から点 $\mathrm{P}(x, y)$ への距離を r，x 軸の正の方向と半直線 OP のなす（弧度法による）角を θ とする．方程式 $r = \sin 2\theta$，$\left(0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}\right)$ で表される曲線を，直線 $y = x$ の周りに回転して得られる局面が囲む立体の体積を V とするとき，$V = 3\pi I_3 + 2\pi I_2$ と表されることを示せ．