# 京大数学理科後期 1997 年度

## 1　問題 1

2 つの放物線 $C_1 : y = x^2$，$C : y = ax^2 (a \neq 1)$ を考える．$C$ を $x$ 軸方向に $p$，ついで $y$ 軸方向に $q$ だけ平行移動した放物線を $C_{p,q}$ と表す．次の条件（*）を満たすような $p$，$q$ が存在するための $a$ の範囲を求めよ．

(*) $C_{p,q}$ は $C_1$ と 2 点で交わる．1 つの交点は $C_{p,q}$ の頂点であり，他の交点においては両者の接線は直交する．

## 2　問題 2

自然数 $n$ と $n$ 項数列 $a_k (1 \leq k \leq n)$ が与えられていて，次の条件（イ)，（ロ）を満たしている．

（イ）$a_k (1 \leq k \leq n)$ は全て正整数で，全て 1 と $2n$ の間にある．$1 \leq a_n \leq 2n$

（ロ）$s_j = \sum_{k=1}^{j} a_k$ とおくとき，$s_j (1 \leq j \leq n)$ は全て平方数である．(整数の 2 乗である数を平方数という.）

このとき

1. $s_n = n^2$ であることを示せ．
2. $a_k (1 \leq k \leq n)$ を求めよ．

## 3　問題 3

点 O を中心とする半径 1 の球面上に 4 点 A，B，C，D があって

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}} + \overrightarrow{\mathrm{OD}} = \overrightarrow{0}$$

が成立しているとする．

1. $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = |\overrightarrow{\mathrm{CD}}|$ であることを示せ．
2. 点 $\mathrm{B}'$，$\mathrm{D}'$ を $\overrightarrow{\mathrm{OB}'} = -\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OD}'} = -\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ となるようにとる．このとき A，$\mathrm{B}'$，C，$\mathrm{D}'$ が互いに異なるならば，これら 4 点は，この順で，ある長方形の頂点となっていることを示せ．

## 4　問題 4

次の連立方程式（*）を考える．

$$(*) \begin{cases} y = 2x^2 - 1 \\ z = 2y^2 - 1 \\ x = 2z^2 - 1 \end{cases}$$

1. $(x, y, z) = (a, b, c)$ が（*）の実数解であるとき，$|a| \leq 1$，$|b| \leq 1$，$|c| \leq 1$ であることを示せ．
2. （*）は全部で 8 組の相異なる実数解をもつことを示せ．

## 5　問題 5

箱の中に青，赤，黄のカードがそれぞれ 3 枚，2 枚，1 枚，合計 6 枚入っている．1 回の試行で，箱の中からカードを 1 枚取り出し，取り出したカードと同じ色のカードを 1 枚加えて，再び箱の中に戻す．従って，$n$ 回の試行を完了した時に，$(n+6)$ 枚のカードが箱の中にある．$n$ 回目の試行が完了した時箱の中にある青のカードの枚数の期待値 $E(n)$ を求めよ．

# 6　問題 6

媒介変数表示された曲線

$$C : x = e^{-t}\cos t, y = e^{-t}\sin t\left(0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

を考える.

1. $C$ の長さ $L$ を求めよ.
2. $C$ と $x$ 軸，$y$ 軸で囲まれた領域の面積 $S$ を求めよ.