

京大数学理科後期 1996 年度

1 問題 1

n は自然数とする.

1. 全ての実数 θ に対し

$$\cos n\theta = f_n(\cos \theta), \sin n\theta = g_n(\sin \theta) \sin \theta$$

を満たし, 係数がともに全て整数である n 次式 $f_n(x)$ と $n - 1$ 次式 $g_n(x)$ が存在することを示せ.

2. $f_n(x) = ng_n(x)$ であることを示せ.
3. p を 3 以上の素数とすると, $f_p(x)$ の $p - 1$ 次以下の係数は全て p で割り切れることを示せ.

2 問題 2

m, n は自然数で, $m < n$ を満たすものとする. $m^n + 1, n^m + 1$ がともに 10 の倍数となる m, n を 1 組与えよ.

3 問題 3

平面上に 60 度で交わる 2 直線 l, m がある. この平面上に点 P_1 をとり, P_1 と直線 l について対称な点を Q_1 , Q_1 と直線 m について対称な点を P_2 と定め, 以下同様に点 $\mathit{P}_3, \mathit{P}_4, \dots$ を定める.

1. $P_4 = P_1$ となることを示せ.

2. 点 P_1 が 2 直線 l, m の交点を中心とし半径 1 の円周上を動くとき, 点 $P_1, Q_1, P_2, Q_2, P_3, Q_3, P_4$ をこの順に結ぶ折れ線の長さの最大値を求めよ.

4 問題 4

x, y は $x + y > 0, x - y > 0$ を満たす実数とする. ある四面体の隣り合う 2 辺の長さが $\sqrt{x + y}, \sqrt{x - y}$ で, 残り 4 辺の長さは全て 1 であるという. このような条件を満たす点 (x, y) の存在範囲を図示せよ.

5 問題 5

a は与えられた実数で, $0 < a \leq 1$ を満たすものとする. xyz 空間内に 1 辺の長さ $2a$ の正三角形 $\triangle PQR$ を考える. 辺 PQ は xy 平面上にあり, $\triangle PQR$ を含む平面は xy 平面と垂直で, さらに点 R の z 座標は正であるとする.

1. 辺 PQ が xy 平面の単位円の内部 (周を含む) を自由に動くとき, $\triangle PQR$ (内部を含む) が動いてできる立体の体積 V を求めよ.
2. a が $0 < a \leq 1$ の範囲を動くとき, 体積 V の最大値を求めよ.

6 問題 6

n を 3 以上の整数とする. 円周上の n 等分点のある点を出発点とし, n 等分点を一定の方向に次のようにすすむ. 各点でコインを投げ, 表が出れば次の点に進み, 裏が出れば次の点を飛び越しその次の点にすすむ.

1. 最初に 1 周回ったとき, 出発点を飛び越す確率 p_n を求めよ.
2. k は 2 以上の整数とする. $k - 1$ 周目までは出発点を飛び越し, k 周目に初めて出発点を踏む確率を $q_{n,k}$ とする. このとき $\lim_{n \rightarrow \infty} q_{n,k}$ を求めよ.